

POČÍTAČOVÁ PODPORA INŽINIERSKÝCH ČINNOSTÍ

Milan SÁGA
Vieroslav MOLNÁR



ISBN 978-83-65593-39-9

Gliwice 2024

***POČÍTAČOVÁ PODPORA
INŽINIERSKÝCH ČINNOSTÍ***

MILAN SÁGA

VIEROSLAV MOLNÁR



Gliwice 2024

Autori:

Prof. Dr. Ing. Milan SÁGA
Strojnícka fakulta
Katedra aplikovanej mechaniky
Žilinská univerzita v Žiline
Žilina, Slovensko

Prof. Ing. Vieroslav MOLNÁR, PhD.
Fakulta výrobných technológií so sídlom v Prešove
Technická univerzita v Košiciach
Prešov, Slovensko

Recenzenti:

Prof. Mgr. Elena PIVARČIOVÁ, PhD.
Technická univerzita Zvolen
Fakulta techniky
Zvolen, Slovensko

Dr hab. inż. Witold BIAŁY, prof. ITG KOMAG
Instytut Techniki Górniczej, KOMAG
Gliwice, Polsko

Doc. Ing. Marián KRÁLIK, CSc.
Volkswagen Slovakia, a.s.
Bratislava, Slovensko

Vysokoškolská učebnica publikovaná pod licenciou Creative Commons Attribution – NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)

Autori zodpovedajú za odbornú stránku textu a za konečnú verziu rukopisu.

Autori: © Milan Sága – Vieroslav Molnár

Všetky práva vyhradené.

Učebnica je dostupná v elektronickej verzii.

Odkaz na stránku: <https://doi.org/10.32056/KOMAG/Monograph2024.4>

ISBN 978-83-65593-39-9

POČÍTAČOVÁ PODPORA INŽINIERSKYCH ČINNOSTÍ

Vysokoškolská učebnica

Milan Sága¹ (<https://orcid.org/0000-0002-0938-8772>)

Vieroslav Molnár² (<https://orcid.org/0000-0003-4182-4033>)

¹ Strojnícka fakulta, Katedra aplikovanej mechaniky, Žilinská univerzita v Žiline, Žilina, Slovensko

² Fakulta výrobných technológií so sídlom v Prešove, Technická univerzita v Košiciach, Prešov, Slovensko

* Korešpondenčný autor email: Vieroslav.Molnar@tuke.sk

Pod'akovanie

Obsah vysokoškolskej učebnice tvorí komplexné, systematické zosumarizovanie a predstavenie teoretických, praktických skúseností a poznatkov autorov, ktoré boli získané pri teoretickom a praktickom výskume na Katedre počítačovej podpory výrobných technológií Fakulty výrobných technológií so sídlom v Prešove Technickej univerzity v Košiciach a Katedre aplikovanej mechaniky Strojníckej fakulty Žilinskej univerzity v Žiline. Je určená univerzitným študentom a inžinierom v praxi, zaoberajúcim sa matematickým modelovaním a počítačovou simuláciou v oblasti výrobných technológií.

Vysokoškolská učebnica bola spracovaná za podpory grantu MŠ SR KEGA projektu č. 018TUKE-4/2022 s názvom „Tvorba nových študijných materiálov vrátane interaktívnej multimedialnej vysokoškolskej učebnice pre oblasť počítačovej podpory inžinierskych činností“ a projektu č. 002ŽU-4/2023 s názvom „Modernizácia študijných programov synergiou digitálnych technológií 3D tlače a počítačových simulácií“.

Práca sa nevenuje len hlboko teoretickému textu a komplexnému rozboru teoretických problémov, ale sa snaží o stručnosť a jasnosť výkladu bez zjednodušovania toho, čo by sa zjednodušovať nemalo.

Predhovor

Vysokoškolská učebnica je venovaná problematike počítačovej podpory inžinierskych činností a matematického modelovania v oblasti výrobných technológií. S narastajúcimi požiadavkami na presnosť, efektivitu a inovatívnosť technických riešení sa počítačová simulácia a modelovanie stávajú kľúčovými nástrojmi pre moderných inžinierov. Význam tohto prístupu spočíva v schopnosti testovať a analyzovať nové návrhy vo virtuálnom prostredí, čo šetrí čas, náklady a znižuje potrebu fyzických prototypov.

Cieľom vysokoškolskej učebnice je poskytnúť študentom a odborníkom v praxi systematický prehľad metód a techník, ktoré sa využívajú v počítačovej podpore inžinierskych činností. Kľúčovú pozornosť venujeme metódam, ako je napríklad metóda konečných prvkov (FEM), a ich aplikáciám pri navrhovaní a optimalizácii výrobných procesov. Vysokoškolská učebnica nekladie dôraz len na teóriu, ale aj na praktické príklady, ktoré čitateľom umožnia preniesť teoretické poznatky do reálnych inžinierskych aplikácií.

Veríme, že študijný materiál poslúži nielen ako zdroj znalostí pre študentov technických odborov I, II a III stupňa vysokosškolského štúdia, ale aj ako užitočná príručka pre inžinierov, ktorí sa chcú neustále vzdelávať a zlepšovať svoje schopnosti v oblasti moderných technológií. V kontexte neustále sa vyvíjajúceho inžinierskeho prostredia je dôležité, aby si odborníci osvojili nové nástroje a prístupy, ktoré im pomôžu efektívne riešiť výzvy, ktoré pred nimi stoja.

Želáme príjemné štúdium.

Autori

Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam symbolov a skratiek.....	11
Úvod.....	13
1 Matematické modelovanie a počítačová simulácia v oblasti výrobných technológií	15
1.1.1 Trendy modelovania a počítačových simulácií v oblasti výrobných technológií	18
2 Počítačová simulácia.....	21
2.1 Kedy použiť počítačovú simuláciu	22
2.2 Analytické prístupy	22
2.3 Numerické prístupy	23
2.3.1 Metóda konečných diferencií (FDM).....	23
2.3.2 Metóda konečných prvkov (FEM)	23
2.3.3 Metóda konečných objemov (FVM).....	24
2.3.4 Metóda hraničných prvkov (BEM).....	26
2.4 Porovnanie a rozdiely FDM, FEM, FVM, BEM.....	26
3 Metóda konečných prvkov (FEM).....	28
3.1 História FEM	28
3.2 Princíp a filozofia FEM	31
3.3 Postup riešenia úlohy pomocou FEM.....	33
3.4 Aplikácia FEM.....	45
3.4.1 Výhody FEM	50
3.5 Výpočtové systémy.....	51
3.5.1 Abaqus.....	51
3.5.2 MSC Adams.....	53
3.5.3 ANSYS Mechanical	55
3.5.4 ANSYS Fluent.....	56
3.5.5 Ansys LS-DYNA.....	58
3.5.6 FORGE.....	60
3.5.7 MSC Marc.....	61

3.5.8	MSC Nastran.....	63
3.5.9	PAM-Crash	65
4	Analýza konečných prvkov (FEA).....	68
5	Statické analýzy	70
5.1	Lineárna statická analýza	70
5.1.1	Statický predpoklad	70
5.1.2	Predpoklad linearity	71
5.2	Nelineárna statická analýza	71
5.2.1	Druhy nelinearity.....	72
5.2.1.1	Geometrická nelinearita.....	72
5.2.1.2	Materiálová nelinearita.....	73
6	Dynamické analýzy	79
6.1	Dynamické zaťaženie	79
6.2	Základné typy dynamických analýz.....	81
7	Modálna analýza (Modal analysis).....	82
7.1	Matematická formulácia problému.....	83
7.2	Využitie modálnej analýzy.....	84
7.3	Dôvody použitia modálnej analýzy	85
7.4	Postup modálnej analýzy pomocou FEM.....	85
8	Harmonická analýza (Harmonic response)	88
8.1	Matematická formulácia problému.....	89
8.2	Účinok zaťaženia pri harmonickej analýze.....	90
8.3	Využitie harmonickej analýzy	91
9	Prechodová analýza (Transient structural analysis)	92
9.1	Matematická formulácia problému.....	92
9.2	Využitie prechodovej analýzy	93
10	Spektrálna analýza (Response spectrum analysis).....	94
10.1	Matematická formulácia problému.....	94
10.2	Využitie spektrálnej analýzy.....	94
11	Záver	95
	Zoznam použitej literatúry	96

Zoznam obrázkov

Obr. 1 Vzťah modelovania a simulácie.....	15
Obr. 2 Rozdelenie modelov.....	16
Obr. 3 Vzťah modelovania a simulácie k ďalším vedným disciplinám.....	18
Obr. 4 Postup pri analýze problému, voľbe metódy a modelovom riešení.....	19
Obr. 5 Ukážka prepojenia viacerých fyzikálnych polí pri modelovaní procesov tavného zvarania.....	19
Obr. 6 Vývoj výrobku využitím virtuálneho navrhovania a testovania.....	20
Obr. 7 Bloková schéma počítačovej simulácie.....	22
Obr. 8 Konštrukcia kontrolného objemu z uzlových bodov siete a s výpočtovým bodom P v strede objemu.....	25
Obr. 9 Kontrolný objem vytvorený z uzlových bodov siete.....	25
Obr. 10 Alexander Hrennikoff a Richard Courant.....	28
Obr. 11 John H. Argyris a Ray W. Clough.....	29
Obr. 12 Richard H. MacNeal a Robert Schwendler.....	29
Obr. 13 Feng Kang.....	30
Obr. 14 Pôvod vzniku FEM.....	31
Obr. 15 Základná myšlienka FEM.....	31
Obr. 16 Diskretizácia oblasti na konečné prvky a uzlové body.....	32
Obr. 17 Pozícia FEM v CAx systémoch.....	32
Obr. 18 Primárne neznáme podľa typu poľa.....	33
Obr. 19 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou osovej symetrie.....	35
Obr. 20 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou rotačnej symetrie.....	35
Obr. 21 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou plošnej (zrkadlovej) symetrie.....	35
Obr. 22 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou opakujúcej sa (translačnej) symetrie.....	35
Obr. 23 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou použitia štvrtiny štruktúry.....	36
Obr. 24 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou polovice štruktúry....	36
Obr. 25 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu z dvoch rôznych materiálov pomocou polovičnej symetrie.....	37
Obr. 26 Ukážka fyzikálneho modelu s premenlivým horizontálnym ťahovým zaťažením vo vertikálnom smere.....	37
Obr. 27 1D, 2D, 3D prvky používané na diskretizáciu skúmanej oblasti modelu [2]....	38
Obr. 28 Ukážka lineárnych typov prvkov [3].....	39
Obr. 29 Ukážka diskretizácie modelu 1D prvkami.....	39

Obr. 30 Ukážka diskretizácie modelu 2D prvkami	40
Obr. 31 Ukážka diskretizácie modelu 3D prvkami	40
Obr. 32 Diskretizácia modelu využitím rôznych typov prvkov, 1D – čiarové, 2D – rovinné, 3D – objemové [3].....	41
Obr. 33 Ukážka rôznej hustoty siete [4].....	42
Obr. 34 Ukážka použitia symetrie pre zníženie procesorového času a rovnakej presnosti výsledkov	42
Obr. 35 Polynómy ako interpolačné funkcie [5]	43
Obr. 36 Oblasti využitia FEM	46
Obr. 37 Ukážky štruktúrálnych simulácií v FEM	46
Obr. 38 Ukážky dynamických simulácií v FEM.....	47
Obr. 39 Ukážky tepelných simulácií v FEM.....	47
Obr. 40 Ukážky elektromagnetických simulácií v FEM.....	48
Obr. 41 Ukážka akustickej simulácie v FEM.....	48
Obr. 42 Ukážky MEMS simulácií v FEM.....	49
Obr. 43 Ukážky fluidných simulácií v FEM	49
Obr. 44 Ukážky biomechanických simulácií v FEM	50
Obr. 45 Ukážky multifyzikálnych simulácií v FEM	50
Obr. 46 Ukážka simulácie v Abaqus/CAE [7]	53
Obr. 47 Ukážka simulácie v Adams [9]	54
Obr. 48 Ukážka simulácie v ANSYS Mechanical [11].....	56
Obr. 49 Ukážka simulácie v ANSYS Fluent [12]	58
Obr. 50 Ukážka simulácie v Ansys LS-DYNA [14].....	59
Obr. 51 Ukážka simulácie vo FORGE [16]	61
Obr. 52 Ukážka simulácie v MSC Marc [18].....	63
Obr. 53 Ukážka simulácie v MSC Nastran [20].....	65
Obr. 54 Ukážka simulácie v PAM-Crash [22]	67
Obr. 55 Proces FEA	68
Obr. 56 Nelineárna a lineárna analýza – Hookov zákon [3]	71
Obr. 57 Interpretácia geometrickej nelinearity [4].....	73
Obr. 58 Hookov zákon – grafická interpretácia [1]	73
Obr. 59 Nelineárna elasticita a oblasť plastickej deformácie materiálu [4].....	74
Obr. 60 Plastický materiálový model – idealizovaný a so spevnením [23]	75
Obr. 61 Bilineárna definícia plastického materiálového modelu [3]	75
Obr. 62 Multilineárna definícia plastického materiálového modelu [3]	76
Obr. 63 Krivka tečenia [23].....	76
Obr. 64 Krivky tečenia pre rôzne hodnoty napätia a teploty [4].....	77

Obr. 65 Príklad ortotropného materiálu (drevo) [23].....	77
Obr. 66 Druhy dynamického zaťaženia [3].....	79
Obr. 67 Rozdelenie dynamických analýz.....	80
Obr. 68 Princíp modálneho rozkladu [24].....	84
Obr. 69 Geometria analyzovanej konštrukcie [24]	86
Obr. 70 Ukážka sieťovania geometrie analyzovanej konštrukcie [24]	86
Obr. 71 Ukážka vybraných vlastných tvarov kmitov získaných modálnou analýzou metódou konečných prvkov v programe ANSYS[24]	87
Obr. 72 Vzorové harmonické zaťaženia s rôznymi frekvenciami v závislosti na čase...	91
Obr. 73 Motor upevnený na skúšobnej stoličici.....	91
Obr. 74 Postup riešenia prechodovej analýzy v FEM.....	93

Zoznam symbolov a skratiek

<i>BEM</i>	metóda hraničných prvkov (Boundary Element Method)
<i>DOF</i>	stupeň voľnosti (degree of freedom)
<i>FDM</i>	metóda konečných diferencií (Finite Difference Method)
<i>FE</i>	konečný prvok (Finite Element)
<i>FEA</i>	analýza konečných prvkov (Finite Element Analysis)
<i>FEM</i>	metóda konečných prvkov – MKP (Finite Element Method)
<i>FSI</i>	interakcia medzi tekutinou a štruktúrou (Fluid Structure Interaction)
<i>FVM</i>	metóda konečných objemov (Finite Volume Method)
<i>MBD</i>	viacbodová dynamika (Multibody Dynamics)
<i>MEMS</i>	mikroelektromechanické systémy (Micro Electro Mechanical Systems)
<i>PDE</i>	parciálne diferenciálne rovnice (Partial Differential Equation)
<i>VPS</i>	riešenie virtuálneho výkonu (Virtual Performance Solution)

Úvod

V súčasnosti technickí inžinieri musia pri projektovaní technického zariadenia vykonávať okrem iného aj matematické výpočty, ktorými overia správnosť navrhovanej geometrie, zvoleného materiálu, ale aj požadovanú bezpečnosť, funkčnosť, spoľahlivosť, životnosť a efektívnosť svojich návrhov. Donedávna sa na technické výpočty využívali väčšinou analytické metódy, ktorých výhodou bola relatívna jednoduchosť, vyúsťujúca do stanovenia jednoduchých vzorcov (zostavených do tabuliek – strojnícke, stavebnícke, elektrotechnické). Nevýhodou analytických metód bolo silné zjednodušenie fyzikálneho modelu reálneho systému alebo prvku, aby sa dal popísať čo najjednoduchšími matematickými rovnicami riešiteľnými pomocou kalkulačky. Takto sa reálny priestorový objekt zredukoval na jedno alebo dvojrozmerný, nelineárne úlohy sa linearizovali a časovo závislé stavy sa riešili len pre ustálené stavy. Používal sa najmä homogénny izotropný materiál, ktorého správanie popisoval jednoduchý materiálový model.

Vďaka rozvoju výpočtovej techniky a výrobe nových materiálov je v súčasnosti možné zostavovať fyzikálne a matematické modely skúmaných objektov blížiac sa realite z hľadiska geometrie, použitého materiálu aj funkcie. Vznikajú nové numerické, počítačovo orientované výpočtové metódy, ktorých algoritmus je zapracovaný do počítačových softvérov. Následne potom možno vo virtuálnej realite vytvoriť výpočtový model, ktorým sa analyzujú zložité lineárne aj nelineárne, stacionárne aj nestacionárne odozvy navrhovaného systému na prevádzkové ale aj kritické stavy zaťaženia.

Trendy počítačovej podpory vo výrobných technológiách sa prejavujú v čoraz väčšej miere a sú zamerané na riešenie komplexných problémov s využitím:

- stratégií viacúrovňového modelovania (multiscale modeling),
- vzájomného prepojenia viacerých fyzikálnych polí (multiphysic coupling).

Problematika teoretických základov metódy konečných prvkov (FEM) ako aj jej aplikácie je široko a podrobne rozpracovaná v domácej a zahraničnej literatúre. Základy FEM sa môžu vyučovať rôznymi spôsobmi. Strojní inžinieri ju radi učia ako metódu štruktúrálnej analýzy, počnúc prútmi a nosníkmi s hľadaním deformácií a posunutí v rámci elastickej štruktúry kontinua. Pre väčšinu strojných inžinierov a to je viac-menej spôsob, akým bola táto metóda vyvinutá v 50. rokoch minulého storočia.

Ďalší spôsob, ako nazerať na FEM, je vnímať ju ako všeobecnú metódu na riešenie problémov okrajových hodnôt parciálnych diferenciálnych rovníc prostredníctvom preformulovania pomocou variačných foriem, častoaj nazývaných slabých foriem. Tento

pohľad vznikol neskôr, v šesťdesiatych rokoch, a má tú výhodu, že je skeptický pre oblasť aplikácie, či už ide o pevnú mechaniku, mechaniku tekutín, akustiku, elektromechaniku atď.

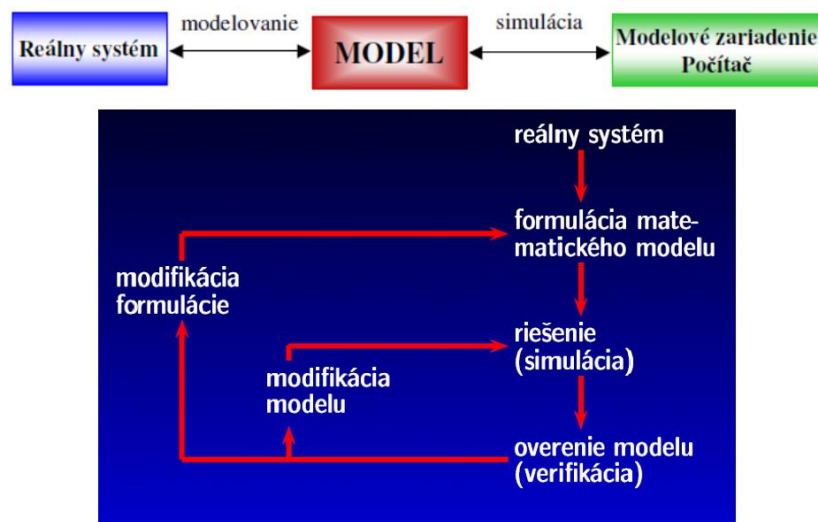
Hlavným cieľom vysokoškolskej učebnice je bližšie, komplexné priblíženie problematiky matematického modelovania a počítačovej simulácie širšiemu spektru používateľov, konštruktérov a výskumníkov. Vysokoškolská učebnica by mala slúžiť ako odrazový bod pre ich ďalšie štúdium a môže byť nápomocná pri ich ďalšom odbornom raste.

Vysokoškolská učebnica je celkovo členená do desiatich kapitol, ktorých úlohou je postupne zoznámiť čitateľa s problematikou. V jednotlivých kapitolách je rozsiahla pozornosť venovaná metóde konečných prvkov (FEM) a jej aplikáciám.

1 Matematické modelovanie a počítačová simulácia v oblasti výrobných technológií

Modelovanie je experimentálno-informačný proces, v ktorom je reálnemu skúmanému systému (originálu) podľa určitých kritérií jednoznačne priradený iný systém, fyzický alebo abstraktný, ktorý sa nazýva model. Predstavuje metódu poznávania, získavania a systemizácie poznatkov o skúmanom systéme.

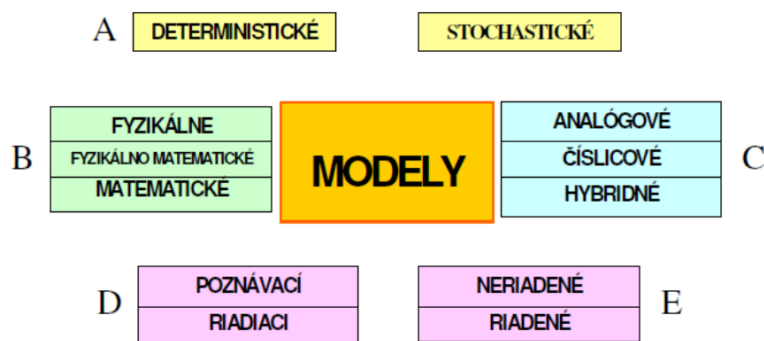
Modelovanie je skúmanie objektov pomocou iných, spravidla umele vytvorených objektov, v ktorých sa vyjadrujú, charakterizujú a definujú iba vybrané vlastnosti, stránky a vzťahy originálneho objektu. Je to vlastne reprodukcia charakteristík určitého objektu na inom objekte, špeciálne vytvorenom na ich štúdium. Tento druhý objekt sa nazýva modelom.



Obr. 1 Vzťah modelovania a simulácie

Modely sa vo všeobecnosti rozdeľujú podľa:

- charakteru modelového procesu (A),
- podobnosti medzi modelom a dielom (B),
- spôsobu spracovania modelovej úlohy (C),
- účelu modelu (D),
- riadenia modelového procesu (E).



Obr. 2 Rozdelenie modelov

Matematický model je zobrazenie skúmanej skutočnosti (originálu), ktoré je vyjadrené matematickými vyjadrovacími rovnicami.

Matematické rovnice opisujú materiálové, energetické bilancie a zmeny hybnosti, elementárnych procesov (dejov), teoretické a empirické vzťahy, ohraničenia parametrov procesu.

Klasifikácia matematických modelov:

Lineárne a nelineárne: Ak sú funkcie (podmienky) reprezentované lineárnymi rovnicami, model sa označuje ako lineárny. Ak je aspoň jedna z podmienok alebo obmedzení reprezentované nelineárnou rovnicou, model sa označuje ako nelineárny.

Deterministické a stochastické (pravdepodobnostné): Deterministický model vykazuje po opakovaní pokusu za rovnakých počiatočných podmienok rovnaké správanie, kým pri stochastickom modeli je prítomná náhoda.

Statické a dynamické: Statický model prvok času neuvažuje na rozdiel od dynamického.

Sústredené parametre a rozložené parametre: Ak je model homogénny (v konzistentnom stave v každej časti systému), parametre sú sústredené. Ak je systém heterogénny (rozličný stav v rôznych častiach systému), sú parametre rozložené. Rozložené parametre sú zvyčajne reprezentované parciálnymi diferenciálnymi rovnicami.

Typy modelov súvisia s typom problémov a s typom inžinierov, ktorí sa riešením týchto problémov zaoberajú:

FUNKCIONALISTI si predstavujú, že každý systém môže nadobúdať nekonečne rôzne podoby, a každej podobe priradia nejaké číslo, funkcionál. Potom si tieto čísla vynesú a hľadajú miesta, ktoré sú niečím zvláštne, zvyčajne minimá, maximá, inflexiu a týmto miestam priradia zvláštny mystický význam, napríklad to, že reprezentujú stav rovnováhy, stav straty stability a pod. Pohybujú sa najmä v oblasti pružných telies, SOLID a sú teda zvyčajne ROBUSTNÍ.

Lahko ich spoznate podľa toho, že za jedinu použiteľnú numerickú metódu považujú konečné prvky (so škripaním zubov snád' aj Boundary elements) a používajú slovíčka ako Cauchy Green tenzor, Kirchhoff - Piola stresses, siedmy Invariant pod.

DIFERENCIALISTI veria zákonu zachovania hmoty, hybnosti a energie a domnievajú sa, že z týchto bilancií dokážu popísať stav systému v nekonečne blízkom okolí ľubovoľného bodu diferenciálnymi rovnicami. Z riešenia týchto rovníc potom veštia realitu celku. Pohybujú sa najmä v oblasti transportných javov a prúdenia. Pri výbere numerické metódy nie sú príliš vyberaví, každá metóda, ktorá vyrieši ich rovnice je im dosť dobrá, ale väčšinou volia metódu konečných objemov. Často používajú slovíčka ako materiálová derivácia.

PARTIKULARISTI neveria mechanike kontinua. Všetko možno odvodiť z mechaniky hmotného bodu. Existujú iba diskrétny veličiny ako v digitálnych počítačoch. Zložitosť reality je spôsobená veľkým množstvom paralelne bežiacich jednoduchých procesov. Spoznate ich podľa toho, že sa stránia všetkých ostatných a sú DISKRÉTNI.

FATALISTI neveria, že je v ľudských silách spoznať zákony božskej prozreteľnosti a preto sa obmedzujú na opis pozorovaných javov. Milujú expertné systémy, metódy umelej inteligencie, inžiniersku koreláciu a štatistiku, aj keď sa pragmaticky nevyhýbajú ani používaniu šedých skriniek.

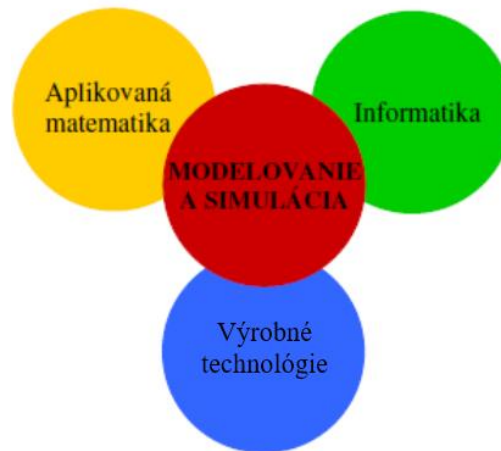
CHAOTISTI pripúšťajú existenciu nejakých princípov, ale neveria v ich zmysluplnú riešiteľnosť. Neznášajú hladké krivky a radšej ich kazia napr. generátormi náhodných čísel. Milujú katastrofy, podivnosti a atrakcie, sú ATRAKTÍVNI. Zvlášť pre ženy, ktoré okúzľujú cudzími slovami a farebnými kvetmi fraktálov.

Simulácia je proces realizácie experimentov na vytvorenom modeli s cieľom skúmať, hodnotiť, analyzovať, pochopiť a predikovať správanie sa systému v rôznych podmienkach. Je to imitácia reálnych procesov a systémov v čase. Simulovanie predstavuje proces získavania odozvy modelu na zmenu vstupných údajov.

Matematické modelovanie a počítačová simulácia:

- predstavuje účinný nástroj pre skúmanie, hodnotenie a predikciu správania sa objektov,
- predstavuje návrh, analýzu a optimalizáciu výrobných procesov,
- prispieva k hlbšiemu pochopeniu javov a procesov, prebiehajúcich na makroskopickej aj mikroskopickej úrovni,
- umožňuje určiť determinujúce faktory, ovplyvňujúce sledovaný proces,
- umožňuje identifikovať príčiny nežiadúcich javov,

- podnecuje ďalší rozvoj experimentálnych metód.



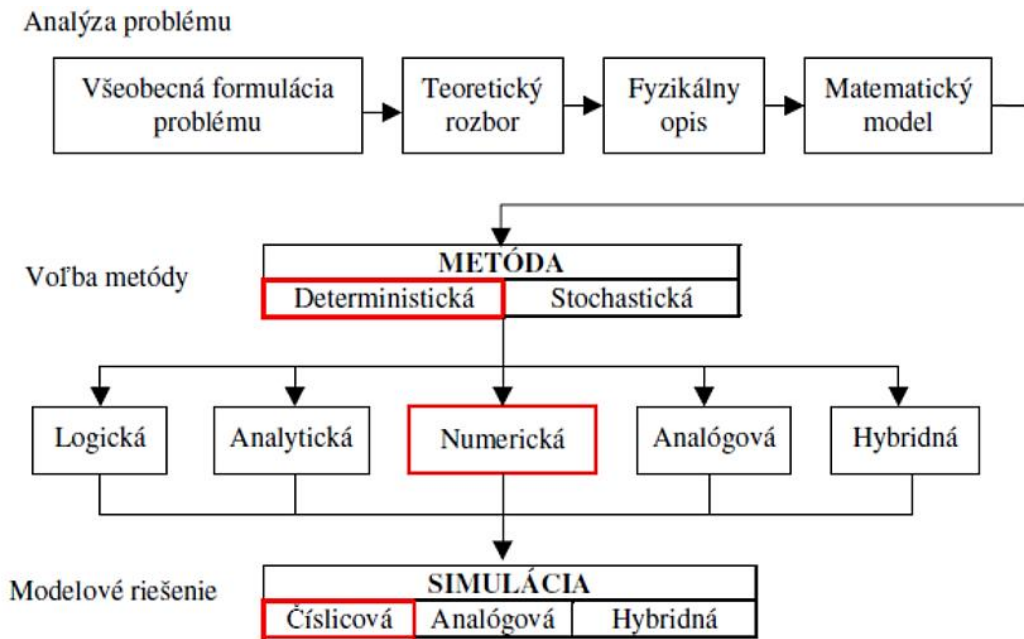
Obr. 3 Vzťah modelovania a simulácie k ďalším vedným disciplinám

1.1.1 Trendy modelovania a počítačových simulácií v oblasti výrobných technológií

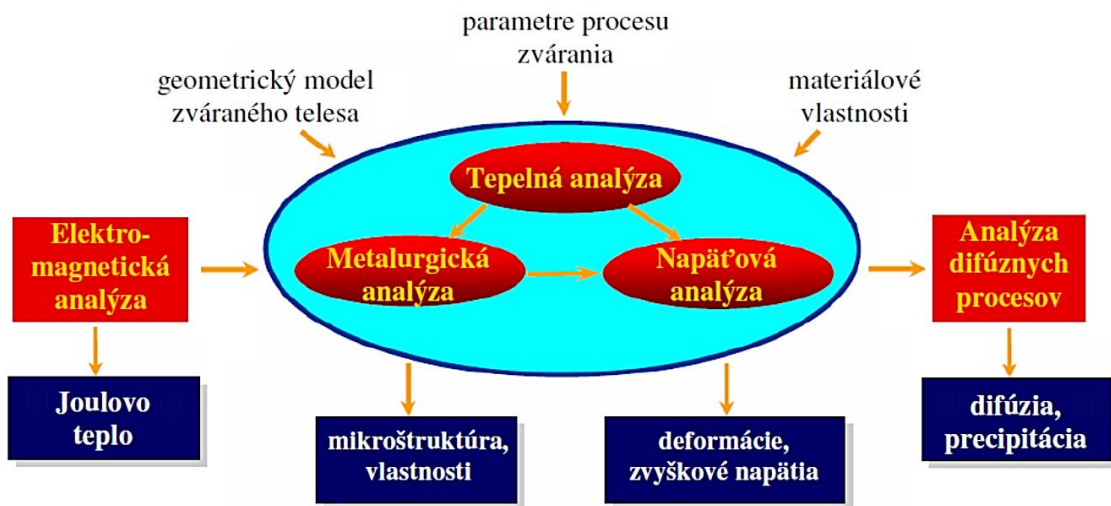
Vo všeobecnosti, vo väčšine výrobných technológií dochádza k vzniku teplotných polí a napäťovo-deformačných stavov. Z metodologického hľadiska je možné existujúce technologické procesy definovať ako **dynamické tepelné, fluidné a štrukturálne systémy**, v ktorých sa menia parametre v priestore a čase, pričom limitujúcim stavom je jeho začiatocný alebo konečný ustálený stav.

Metodológia modelovania je preto orientovaná na definíciu systémov, ktoré možno označiť ako **deterministické, spojité a nelineárne**. Pritom sa zvažuje, že náhodilé (stochastické) javy, ako sú zmeny povrchových vlastností materiálov (absorptancia, emisivita, povrchové napätie), poruchy vnútornej stavby materiálov, kolísanie energetických príkonov do procesu z okolia atď. nemajú na skúmaný jav výraznejší vplyv, a preto sú pri tvorbe simulačných modelov zanedbávané.

Asymptotický model, pod ktorý spadajú tepelné a štrukturálne úlohy s okrajovými podmienkami, vyžaduje definovanie podmienok jednoznačnosti, t.j. zadanie geometrických, okrajových a počiatocných podmienok ako aj termofyzikálnych a mechanických vlastností materiálov.

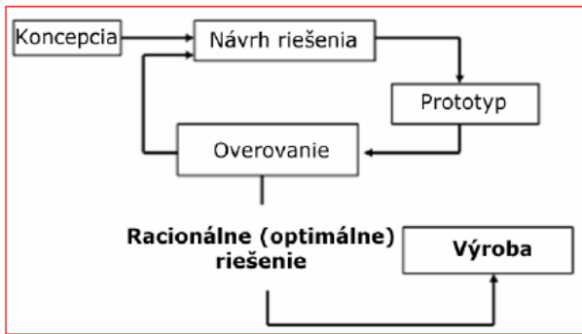


Obr. 4 Postup pri analýze problému, voľbe metódy a modelovom riešení

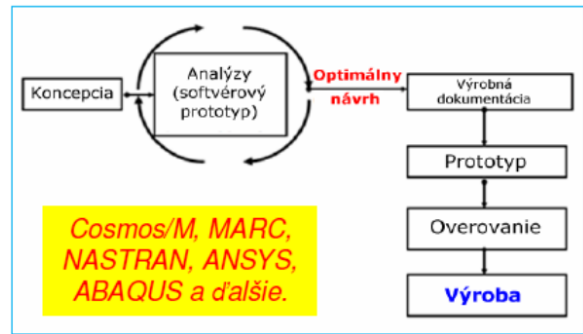


Obr. 5 Ukážka prepojenia viacerých fyzikálnych polí pri modelovaní procesov tavného zvarovania

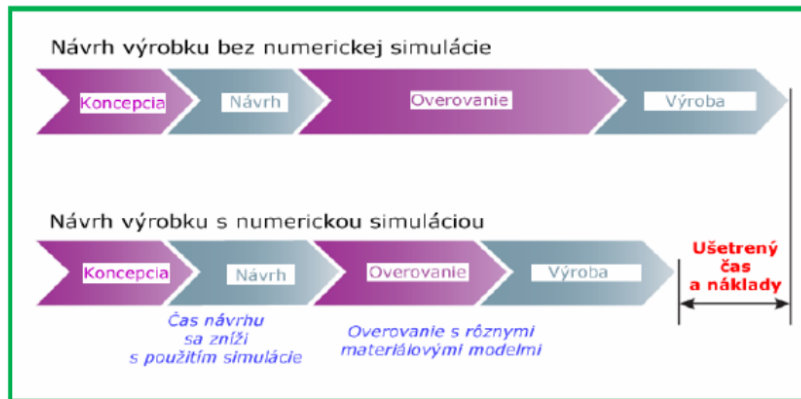
Tavné zvarovanie je jednou z výrobných technológií, predstavujúce zložitý proces, ktorý v sebe zahŕňa multifyzikálne (tepelné, fluidné, metalurgické, chemické, mechanické, difúzne a v niektorých prípadoch tiež elektromagnetické javy), ktoré závisia od veľkého množstva parametrov.



Tradičný postup pri vývoji nového výrobku



Vývoj produktu s pomocou predikčného inžinierstva



Obr. 6 Vývoj výrobku využitím virtuálneho navrhovania a testovania

2 Počítačová simulácia

Pri matematickom modelovaní inžinierskych úloh (v mechanike poddajného telesa) vznikali zložité, dovedy neriešiteľné systémy obyčajných alebo parciálnych diferenciálnych rovníc. Z toho vyplynula potreba vývoja numerických počítačovo orientovaných metód, ktorými by sa tento problém zvládol.

Numerické metódy transformujú systém parciálnych alebo obyčajných diferenciálnych rovníc popisujúci danú úlohu na algebraický systém rovníc, ktorý sa rieši na počítači. Napr.:

- diferenciálne pohybové rovnice poddajného kontinua,
- diferenciálne rovnice prenosu tepla,
- diferenciálne rovnice prúdenia plynov a kvapalín,
- diferenciálne rovnice elektrického a elektro-magnetického poľa,
- diferenciálne rovnice akustiky, žiarenia, atď.

Diferenciálne rovnice sú zostavené pre neznámu funkciu poľa (posunutia, teploty, elektrického potenciálu, ...) na konečnej ohraničenej súvislej alebo viacnásobne súvislej oblasti (čiara, plocha, objem). Neznáme pole je spravidla skalárne (teplotné, potenciálové) alebo vektorové (deformačné, rýchlostné).

Cieľom riešenia diferenciálnych rovníc je nájsť túto funkciu závislú od súradníc zvoleného vzťahného súradnicového systému tak, aby spĺňala počiatočné a okrajové podmienky riešenia. Táto funkcia môže byť rovnicou krivky, plochy alebo objemu. Dosadením súradníc vybraného bodu skúmanej oblasti možno z tejto funkcie dostať hodnotu „primárnej“ neznámej fyzikálnej veličiny v danom bode.

K dispozícii sú dva základné spôsoby výpočtu:

- a) *ručné prepočítanie pomocou vzťahov, ktoré sú teoreticky i prakticky overené* – takéto výpočty sú síce presné, ale vždy môžeme vypočítať len napätia, posuny, reakcie v počítanom mieste. Ak by sme chceli zmapovať celý výrobok komplikovanejších tvarov, museli by sme vykonať veľmi veľa opakujúcich sa výpočtov. V komplikovaných prechodoch výrobku by sme ale určite narazili na problémy so správnym naformulovaním vzťahov. Ručné výpočty je vhodné použiť pri jednoduchých súčiastkach ako sú profily, hriadele, valcové nádoby a rôzne symetrické súčiastky jednoduchých tvarov.

- b) *výpočty metódou konečných prvkov* - táto metóda je použiteľná pomocou počítača. Je to spôsob výpočtu pomocou matematického modelu, ktorý sa vytvorí na základe vymodelovaného tvaru súčiastky a zadaním okrajových podmienok.

Počítačovú simuláciu je možné považovať za informačný experiment, v ktorom je skúmaný problém analyzovaný **deterministicky** s využitím **numerických metód**, pričom modelové riešenie je realizované **číslicovou simuláciou** prostredníctvom vhodného programového systému (Obr. 4.).

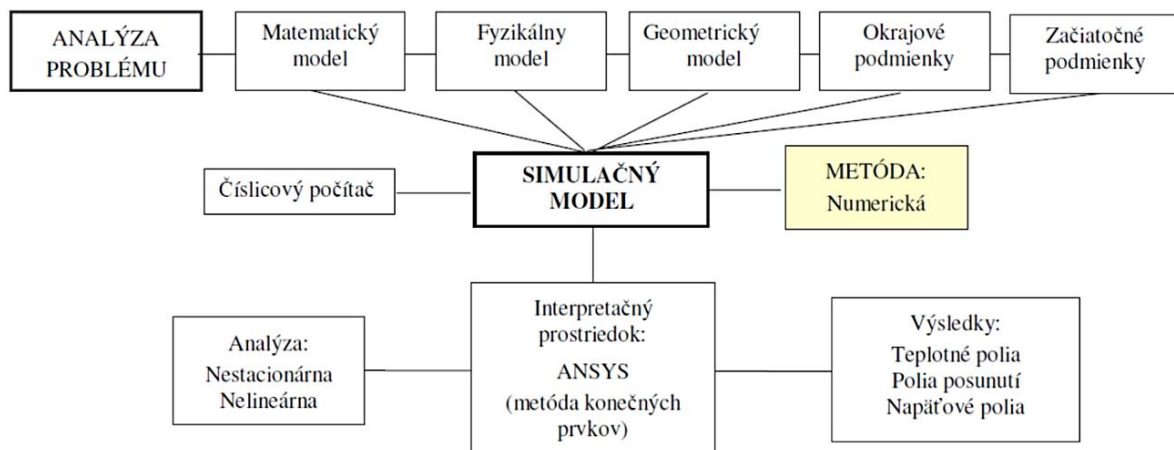
2.1 Kedy použiť počítačovú simuláciu

Použitie simulácie je vhodné a užitočné najmä v prípadoch, ak:

- reálny systém nie je k dispozícii,
- procesy v systéme prebiehajú príliš rýchlo alebo pomaly,
- reálne experimenty sú nebezpečné, finančne alebo časovo príliš náročné.

Simuláciu sa neodporúča realizovať, ak

- problém je možné riešiť analyticky,
- je jednoduchšie a lacnejšie realizovať reálne experimenty,
- nie sú k dispozícii dostatočne presné vstupné údaje,
- model nie je možné verifikovať.



Obr. 7 Bloková schéma počítačovej simulácie

2.2 Analytické prístupy

Umožňujú získať riešenie v tvare funkcie času a priestorových súradníc. Ich výhodou je veľká rýchlosť výpočtu a malé hardvérové nároky. Ich použitie je vo väčšine prípadov

obmedzené na zjednodušené úlohy. Analytické metódy zahŕňajú napr. variačné metódy, metódy separácie premenných, približné analytické metódy využívajúce Besselove funkcie a ďalšie. Ich význam klesá s rozvojom výpočtovej techniky.

2.3 Numerické prístupy

Využívajú sa predovšetkým pre riešenie reálnych problémov. Ich podstatou je diskretizácia spojitých veličín, ktorá vedie k vyjadreniu diferenciálnych rovníc ako sústavy algebraických rovníc. Ich riešením je hľadané riešenie skúmaného procesu v konečnom počte diskrétnych miest [1].

K numerickým metódam patrí:

- metóda konečných diferencií (FDM),
- metóda konečných prvkov (FEM),
- metóda konečných objemov (FVM),
- metóda hraničných prvkov (BEM).

K ďalším metódam možno zaradiť: neurónové siete a vyvíjané sú bezsiet'ové metódy.

2.3.1 Metóda konečných diferencií (FDM)

V FDM je vyjadrenie diferenciálnych rovníc v tvare sústavy diferenčných rovníc. Presnosť riešenia je daná diferenčnou schémou (explicitná, implicitná a pod.) a hustotou siete. Relatívna jednoduchosť schémy umožňuje využitie tejto metódy i pre silno nelineárne združené problémy, väčšinou pri použití veľmi rozsiahlych sietí. Typické uplatnenie je pre tepelné výpočty a prúdenie, menej časté je pre výpočty štruktúrnych úloh. Väčšinou pre definované geometrie, ktoré by mohli byť reprezentované štruktúrovanými mriežkami. Táto metóda je podmnožinou FEM, pretože pracuje hlavne pre štruktúrovanú priestorovú diskretizáciu. To znamená, že problémy riešené metódou konečných diferencií by sa dali vyriešiť FEM, ale konverzácia nie je nevyhnutne pravdivá. Jeden z rozdielov v prípade FDM spôsobuje aproximácia vyššieho rádu v Taylorovom rade, ktorý sa používa na linearizáciu PDE (chyba krátenia).

2.3.2 Metóda konečných prvkov (FEM)

FEM patrí do skupiny variačných metód. Riešenie je hľadané v tvare minimalizácie funkcionálu príslušného k danej úlohe vzhľadom k tejto veličine (napr. pre štruktúrne úlohy sa jedná o funkcionál celkovej potencionalnej energie, pre tepelné úlohy je to funkcionál

celkovej energie sústavy). To vedie k sústave algebraických rovníc, ktorých riešením sú neznáme hodnoty parametrov tvarových funkcií.

Táto metóda diskretizuje úlohu do konečných prvkov a vypočíta vlastnosti v každom uzle. Tvarové funkcie alebo základné funkcie sa používajú na interpoláciu v konečnom prvku, pre riešenie získané v týchto uzloch. Všeobecne je prijateľná lineárna interpolácia. Ak tomu tak nie je, môžu sa použiť aj funkcie kvadratického alebo kubického tvaru na úkor výpočtového času. Každý konečný prvok je formulovaný s maticou tuhosti, ktorá sa nazýva lokálna matica tuhosti. Výsledkom je, že parciálne diferenciálne rovnice sa konvertujú na súbor algebraických rovníc, ktoré sa dajú pomerne ľahko vyriešiť. Na riešenie týchto algebraických rovníc sú už využívajú počítačové programy.

FEM je najčastejšie používaná a je účinná pre všetky geometrie vrátane tých, ktoré majú komplikované tvary a vlastnosti. FEM transformuje výpočet primárnej neznámej v teoreticky nekonečnom počte bodov oblasti na výpočet jej hodnôt v konečnom počte bodov – v uzlových bodoch. Pri iných numerických metódach nemajú voľné koeficienty náhradnej funkcie spravidla žiaden fyzikálny význam, a ak sa volia podoblasti, tie majú spravidla diferenciálnu a nie konečnú veľkosť. FEM je však tiež vzhľadom na voľbu náhradných funkcií metódou približnou a jej presnosť závisí na jemnosti diskretizácie riešenej oblasti na konečné prvky a uzlové body. FE majú tvar čiary, plochy alebo objemu konečných rozmerov.

Programy FEM dokážu riešiť viaceré typy výpočtov:

- lineárnu a nelineárnu statiku, dynamiku a stabilitu,
- teplotné polia,
- laminárne a turbulentné prúdenia,
- tvarovú a rozmerovú optimalizáciu,
- únavu,
- elektromagnetizmus.

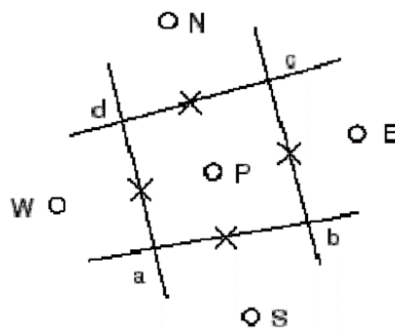
2.3.3 Metóda konečných objemov (FVM)

Je založená na podobnom princípe ako FDM (vyjadrenie diferenciálnych rovníc v tvare sústavy diferenčných rovníc). Rovnako ako pri FDM je presnosť riešenia daná diferenčnou schémou (explicitná, implicitná a pod.) a hustotou siete. Relatívna jednoduchosť schémy umožňuje využitie i pre silno nelineárne združené problémy, väčšinou pri použití veľmi rozsiahlych sietí.

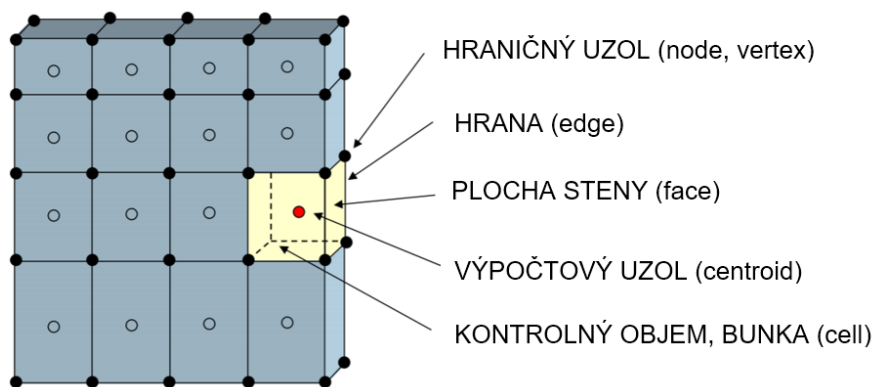
Na Obr. 8 je znázornená schéma štruktúrovanej siete. Uzlové body a, b, c, d siete tvoria bunky v tvare štvoruholníka. Štvoruholníky sa interpretujú ako kontrolné objemy. V strede

objemu sa nachádza výpočtový bod P, ktorý reprezentuje celý kontrolný objem. Susedné body sú E, W, N a S.

Na kontrolný objem (Obr. 9) sa aplikujú určujúce rovnice prúdenia v integrálnom tvare - t.j. počíta sa tok hmotnosti, hybnosti a energie cez steny objemu. Vlastnosti sú vypočítané pre každú bunku namiesto uzla. Vychádza z integrálnej formy ochranných zákonov a dokáže zvládnuť diskontinuity v riešeniach. Jednoducho povedané, čo prichádza, musí ísť von. FVM aproximuje hodnotu integrálu na referenčnej bunke.



Obr. 8 Konštrukcia kontrolného objemu z uzlových bodov siete a s výpočtovým bodom P v strede objemu



Obr. 9 Kontrolný objem vytvorený z uzlových bodov siete

Čím je sieť konečných prvkov jemnejšia, tým je presnosť riešenia vyššia. Typické uplatnenie týchto metód je pre tepelné výpočty, je to efektívne riešenie problémov pri prietokoch kvapaliny, menej časté je pre výpočty štrukturálnych úloh. FVM je implementovaná napr. vo výpočtovom systéme Fluent (tepelné úlohy, prúdenie a niektorých združených tepelných procesoch, napr. viacfázové prúdenie, fázové premeny, horenie a ďalšie).

2.3.4 Metóda hraničných prvkov (BEM)

Numerická metóda na riešenie lineárnych parciálnych rovníc, ktoré sú formulované v tvare integrálnych rovníc. Používajú sa v rôznych inžinierskych a vedeckých oblastiach (fluidná mechanika, akustika, elektromagnetizmus, mechanika lomu). V BEM je vytvorený model súčiastky rozdelený na elementárne prvky, ktorých rozmery sa dajú nastaviť a majú pevne stanovené hraničné prvky. Pri tomto systéme vznikajú v niektorých prípadoch určité nepresnosti. Je to napríklad v okolí komplikovaných otvorov v súčiastke, alebo v zložitých prechodoch jednotlivých plôch. Pre program je problematické pokryť súčiastku zodpovedajúcimi elementmi a preto sa často tieto oblasti zjednodušujú. Toto môže ovplyvňovať spoľahlivosť výsledkov, podľa ktorých sa budú konštruktéri ďalej rozhodovať.

BEM v porovnaní s FEM ponúka redukcii systému o jeden rad. Prakticky to znamená redukovanie priestoru potrebného na archiváciu vstupných dát systému. Napriek tomu sa v integračnej formulácii nedá vyhnúť náročnému vyhodnocovaniu koeficientov matíc, čo v konečnom dôsledku môže viesť k predĺženiu výpočtového času. K podobnému javu môže dôjsť pri presunutí potreby poznania hodnôt hľadanej veličiny vo vnútri skúmanej domény na postprocesor.

Problematickým je aj absencia nenulových prvkov v maticiach systému, čo sťažuje použitie kompresných metód pri archivácii alebo riešení sústav rovníc. Metóda však dokonale eliminuje nevýhodu FE a to previazanosť geometrie na samotný model. Aj keď väčšina sofistikovaných FEM softvérov ponúka automatické presieťovanie úlohy pri požadovaných zmenách, diskutabilným ostáva kompatibilita riešených modelov, prípadne mrhanie prvkami pri potrebe dosiahnutia výsledkov s dostatočnou presnosťou.

Riešením sa ukazuje moderná kombinácia FEM a BEM, keď regióny sú vzájomne previazané pomocou systému hraničných prvkov a nelinearity systému sú podchytené konečnými prvkami.

2.4 Porovnanie a rozdiely FDM, FEM, FVM, BEM

Základným rozdielom FEM oproti iným numerickým metódam je, že náhradné funkcie sa volia nie pre celú oblasť, ale pre podoblasti konečných rozmerov (na ktoré je daná oblasť rozdelená - diskretizovaná) – konečné prvky FE. Zásadou je, že **pre všetky prvky danej skupiny sú náhradné funkcie rovnaké**. FE sú navzájom pospájané uzlovými bodmi (môžu ležať na hranici prvku – napr. v „rohoch“, ale aj vo vnútri prvku). Voľnými parametrami sú primárne neznáme riešeného poľa (posunutia, teploty, potenciály, ...) v uzlových bodoch.

Pri porovnávaní rozdielu medzi metódou konečných prvkov (FEM), metódou konečných diferencií (FDM) a metódou konečných objemov (FVM) je potrebné konštatovať, že všetky tieto metódy sú nejakou formou numerických metód, ktoré sa používajú na riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc (PDE), ktoré matematicky reprezentujú funkčný vzťah medzi ovplyvňujúcimi stavovými premennými v oblasti analýzy. PDE môžu byť klasifikované ako hyperbolické, parabolické a eliptické na základe ich diskriminačnej hodnoty. To závisí od fyzického javu, ktorý je formulovaný pomocou PDE. Na získanie týchto PDE sa uplatňujú zákony ochrany, a to zachovanie hmoty, hybnosti a energie. Vždy treba mať na pamäti, že tieto numerické metódy sú vždy aproximačné – približné. Preto je odchýlka od presných výsledkov vždy nevyhnutná. Ak je táto odchýlka prijateľná, výsledky simulácie konečných prvkov sa stávajú platnými.

Metóda konečných prvkov (FEM) je najobľúbenejšia numerická metóda, pretože je extrémne všestranná. Metóda konečných diferencií (FDM) sa môže použiť napríklad len v špecifických prípadoch, keď je geometria dostatočne jednoduchá a neexistuje žiadne miestne zjemnenie siete. Metóda konečných objemov (FVM) sa naopak často používa v aplikáciách fluidnej dynamiky (CFD), pretože ľahko zvládne nelinearity v Navier-Stokesových rovniciach.

Ďalším dôležitým rozdielovým faktorom FDM v porovnaní s FEM a FVM je, že je založený na diferenciálnej forme riadiacich rovníc. FEM a FVM sú založené na integrálnej forme alebo slabej formulácii.

Rozdiely medzi FEM a ostatnými numerickými metódami:

- Voľné parametre náhradnej funkcie sú primárnymi neznámymi (posunutia, teploty, potenciály,...) riešeného poľa v uzlových bodoch.
- Náhradné funkcie sa nevolia pre celú oblasť, ale iba na podoblasti – konečnom prvku.
- Presnosť FEM je možné zvýšiť jemnosťou diskretizácie na konečné prvky tzv. „zjemnením siete prvkov“.
- FEM nie je závislá na charaktere riešenej oblasti, je formulovaná všeobecne a preto je vhodná i pre teórie poľa vyššieho stupňa (nelineárne a časovo závislé úlohy) a nespojité systavy.
- FEM umožňuje oproti iným metódam určiť hodnotu primárnej neznámej mimo uzlových bodov pomocou použitia tvarových (interpolačných) funkcií.

3 Metóda konečných prvkov (FEM)

FEM predstavuje metódu na aproximáciu riešení matematických problémov, ktoré sú zvyčajne formulované tak, aby presne vyjadrili predstavu o nejakom aspekte fyzickej reality. V súčasnosti patrí medzi najuniverzálnejšie, najrozšírenejšie a najefektívnejšie numerické metódy riešenia inžinierskych úloh. Slúži na simuláciu priebehov napätia, deformácii, vlastných frekvencií, prúdenie tepla, javov elektromagnetizmu, prúdenie tekutín a pod. na vytvorení fyzikálnom modeli. Jej princíp spočíva v diskretizácii spojitého kontinua do určitého (konečného) počtu prvkov, pričom zisťované parametre sú určované v jednotlivých uzlových bodoch. FEM sa používa predovšetkým pre kontrolu už navrhnutých zariadení, alebo na stanovenie kritického (najviac namáhaného) miesta konštrukcie. Hoci sú princípy tejto metódy známe už dlhšiu dobu, k jej masovému využitiu došlo až s nástupom modernej výpočtovej techniky. Štúdium alebo analýza javu pomocou FEM sa často označuje ako analýza konečných prvkov (FEA).

3.1 História FEM

Aj keď je ťažké stanoviť presný dátum vzniku FEM, metóda vznikla vďaka potrebe riešiť zložité fyzikálne problémy pružnosti a štruktúrnej analýzy v inžinierskej praxi (v civilnom a leteckom inžinierstve). Jej počiatky možno sledovať v práci Alexandra Hrennikoffa (r. 1941) a Richarda Couranta (r. 1942) (Obr. 10).



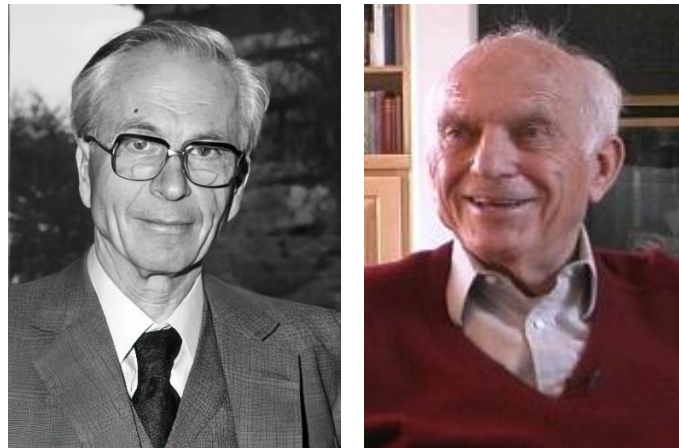
Obr. 10 Alexander Hrennikoff [2] a Richard Courant [3]

Hoci boli prístupy použité týmito priekopníkmi v zásade odlišné, mali jednu spoločnú charakteristiku: rozdelenie spojitaj oblasti do množiny samostatných podoblastí.

Hrennikoffova práca rozdeľuje oblasť pomocou mriežky, zatiaľ čo Courantov prístup delí oblasť do konečného množstva trojuholníkových elementov. Nasleduje riešenie eliptických parciálnych diferenciálnych rovníc druhého stupňa, ktoré boli zostavené z úlohy zaoberajúcej sa krutom.

Vývoj FEM začal v 50. rokoch 20. storočia na univerzite vo Stuttgarte práce Johna Argyrisa (r. 1954) a pokračoval prácami Raya W. Clougha na univerzite v Berkeley v r. 1957 (Obr. 11).

Termín FE (Finite Element) sa prvýkrát objavil v 60-tych rokoch (R.W. Clough). V krátkom čase sa ukázalo omnoho širšie využitie tejto metódy a jej vývoj nie je ukončený ani v súčasnosti.



Obr. 11 John H. Argyris [4] a Ray W. Clough [5]

V roku 1963 bol Richardom H. MacNealom a Robertom Schwendlerom (Obr. 12) vyvinutý program SADSAM (Structural Analysis by Digital Simulation of Analog Methods), ktorý je považovaný za predchodcu MSC/NASTRAN.



Obr. 12 Richard H. MacNeal [6] a Robert Schwendler [7]

Na konci 60. rokov nechala NASA vyvinúť softvér NASTRAN pracujúci na princípe FEM.

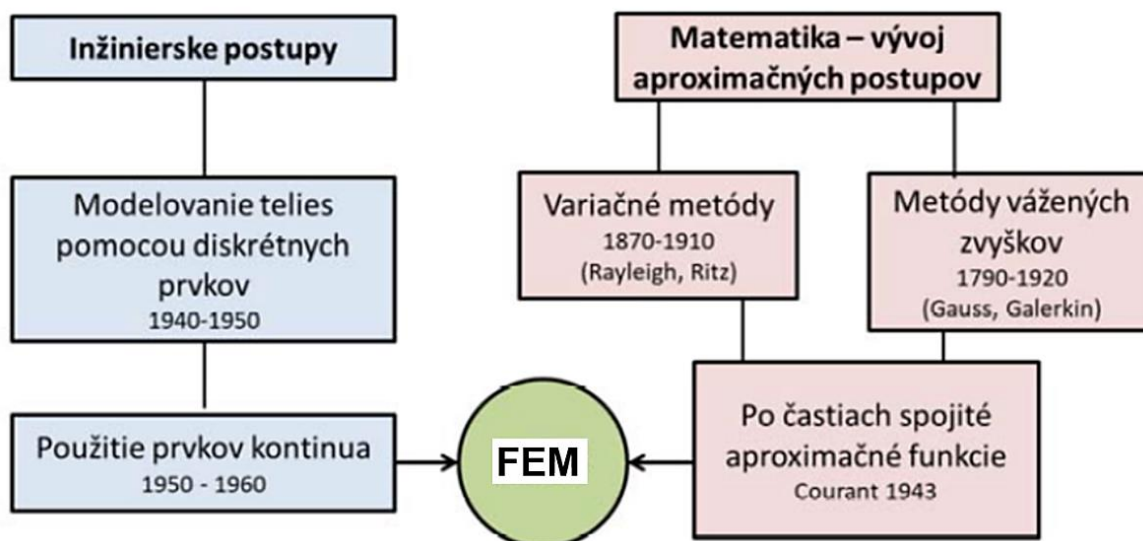


Obr. 13 Feng Kang

V roku 1965 čínsky výskumník Feng Kang (Obr. 13) navrhol numerickú metódu nazvanú "metóda konečných rozdielov (FDM) založenú na princípe variácie", čo je ekvivalent FEM. Jeho práca zostala západnému svetu dlhé desaťročia ukrytá.

FEM vznikala v prostredí troch nezávislých skupín: aplikovaní matematici, fyzici a inžinieri. FEM v praktickej forme, ako ju poznáme, vznikla v prostredí nezávislej skupiny inžinierov – originálna zmienka: J. H. Argyris a S. Kelsey (r. 1955).

Na Slovensku sa FEM a výpočtovými metódami zaoberali pracovníci na Strojníckej fakulte STU v Bratislave (Š. Benča, J. Jelemenský, P. Élesztös), na Stavebnej fakulte STU (J. Králik, J. Ravinger, N. Jendželovský, M. Sokol), na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU (V. Kutiš, J. Paulech, J. Hrabovský), na Strojníckej fakulte TU v Košiciach (F. Šimčák, J. Bocko, J. Segľa, V. Ivančo), na Strojníckej fakulte ŽU v Žiline (V. Kompiš, M. Žmindák), na Ústave stavebníctva a architektúry SAV v Bratislave (J. Sládek, V. Sládek), a iní.

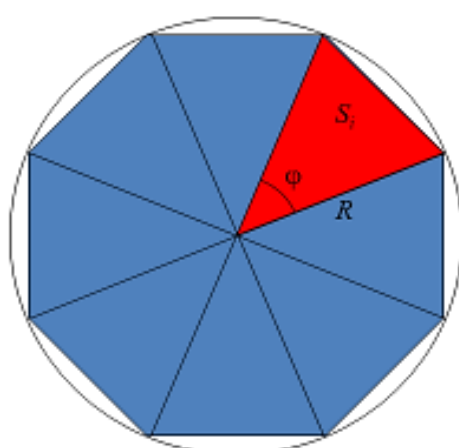


Obr. 14 Pôvod vzniku FEM

3.2 Princíp a filozofia FEM

FEM je založená na Lagrangeovom princípe: *Teleso je v rovnováhe, ak celková potenciálna energia deformácie sústavy je minimálna.*

Na vyriešenie problému rozdeľuje zložitý objekt na menšie, jednoduchšie bloky (elementy, prvky), ktoré sa nazývajú konečné prvky. Jednoduché rovnice, ktoré modelujú tieto konečné prvky, sú potom zostavené do väčšieho systému rovníc, ktoré modelujú celý problém. FEM potom používa variačné metódy na určenie približného riešenia minimalizovaním pridruženej chybovej funkcie [8].



Príklad:

Plocha i -tého trojuholníka:

$$S_i = \frac{1}{2} R^2 \sin \varphi$$

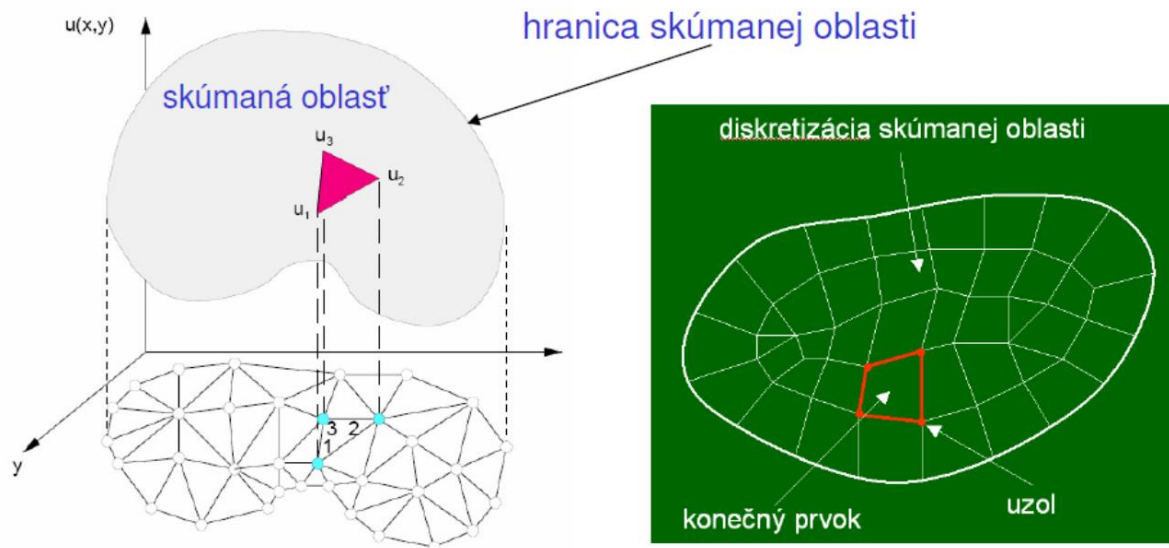
Plocha kruhu:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} R^2 \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right) \rightarrow S = \pi R^2 \text{ ak } N \rightarrow \infty$$

Obr. 15 Základná myšlienka FEM

Pred riešením akejkoľvek úlohy stojí vždy matematický model vyplývajúci z fyzikálneho modelu. Výsledkom FEM je riešenie matematického modelu.

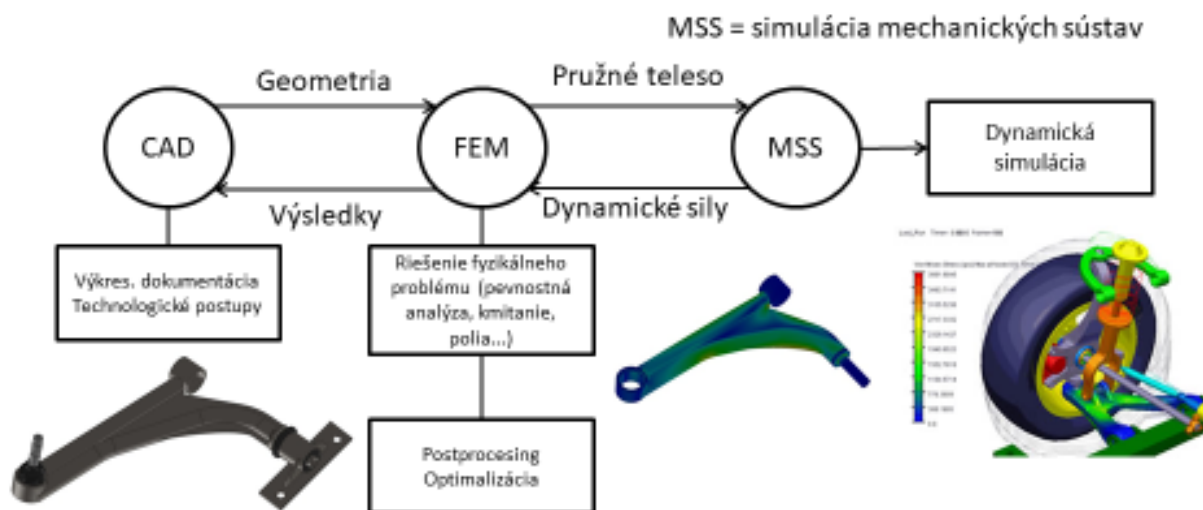
Riešenie FEM nikdy neposkytuje viac informácií ako obsahuje matematický model (nutnosť voľby správnych matematických modelov a ich správnej interpretácie).



Obr. 16 Diskretizácia oblasti na konečné prvky a uzlové body

FEM (z pohľadu matematiky) = približné riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc
FEM (z pohľadu technickej praxe) = približná metóda riešenia správania sa kontinua s uvažovaním počiatočných a okrajových podmienok

FEM je dnes dôležitou súčasťou v počítačom podporovanom návrhu produktu (CAx), kde má dnes už masívne využitie.



Obr. 17 Pozícia FEM v CAx systémoch

3.3 Postup riešenia úlohy pomocou FEM

Uvedený postup je tvorený krokmi A ÷ H, ktoré sa vykonávajú v:

1. <i>Preprocesore</i> (príprava modelu, diskretizácia - kroky A ÷ E) →
2. <i>Solveri</i> (výpočet – kroky F, G) →
3. <i>Postprocesore</i> (zobrazenie výsledkov – krok H)

V rámci uvedeného postupu je **najdôležitejšia voľba vhodného matematického modelu a oblasti techniky**, do ktorej úloha spadá:

Voľba vhodného matematického modelu:

Realizuje sa na základe fyzikálneho (technického) problému, ktorý má popisovať. Pri voľbe vhodného matematického modelu je výhodné **uvažovať s výberom niekoľkých modelov** rôznej zložitosti a postupovať od výpočtu najjednoduchšieho po najzložitejší. Týmto spôsobom sa získa množina modelov, ktoré možno navzájom porovnávať.

Výber oblasti techniky:

- mechanika, termomechanika, prúdenie tekutín, elektrina, akustika, magnetizmus ..., príp. združená úloha so vzájomnou interakciou jednotlivých polí,
- identifikácia lineárnosti resp. nelineárnosti, stacionárnosti resp. časovej závislosti riešenej úlohy,
- stanovenie podmienok jednoznačnosti riešenia úlohy, t.j. geometria, materiálové vlastnosti, počiatočné a okrajové podmienky.

Pole	Akcia	Reakcia
Silové	Sila F	Premiestnenie u
Teplotné	Tepelný tok Φ	Teplota T
Elektrické	Elektrický prúd I	Elektrický potenciál U
Prúdenie tekutín	Tlak p	Rýchlosť prúdenia w

Obr. 18 Primárne neznáme podľa typu poľa

Dôležitá je taktiež definícia modelu, ktorý je **efektívny a spoľahlivý**. Pre posúdenie **efektivity a spoľahlivosti** modelu sa používa *veľmi presný (zložitý) model*, ktorý sa porovnáva sa s posudzovaným modelom.

Efektívnosť matematického modelu: vypočíta požadovanú odozvu s požadovanou presnosťou za čo najnižšiu cenu.

Spoľahlivosť matematického modelu: vypočíta požadovanú odozvu s požadovanou presnosťou vzhľadom k veľmi presnému matematickému modelu (alebo experimentu).

Krok A - Geometrický model skúmanej oblasti v CAD

Zásady pri tvorbe geometrického modelu:

Pri tvorbe geometrického modelu je dôležité dodržiavať nasledovné zásady:

- zjednodušenie geometrického tvaru,
- odstránenie alebo tvarové zjednodušenie nepodstatných častí geometrie pre riešenie úlohu,
- redukcia na najnižšiu n-rozmernú úlohu,
- využitie symetrie, antisymetrie geometrie alebo zataženia, rotačnej symetrie ...,
- zjednodušenie mechanických a fyzikálnych vlastností materiálu (homogenizácia, redukcia anizotropie).

Ak je geometrický model symetrický z hľadiska geometrie, materiálových vlastností a zaťaženia, potom je z hľadiska výpočtu **výhodné modelovať iba jeho reprezentatívnu časť**.

Fyzický systém musí byť symetrický z hľadiska:

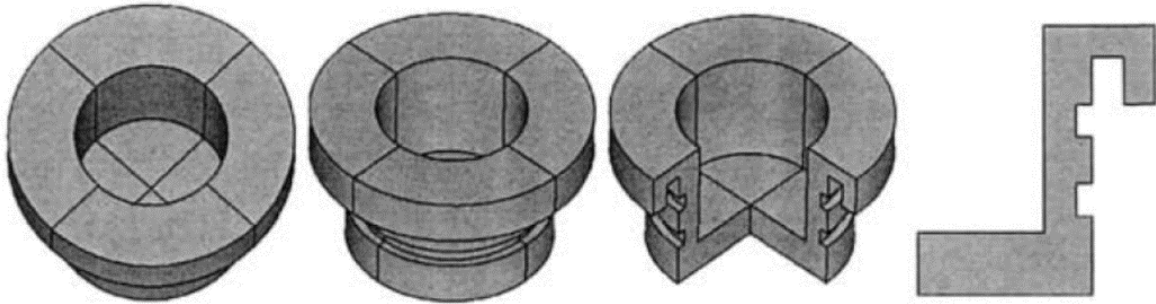
- **geometrie**
- **vlastností materiálu**
- **zaťaženia**
- **obmedzenia stupňov voľnosti (DOF)**

Aplikácia podmienok symetrie z hľadiska geometrie

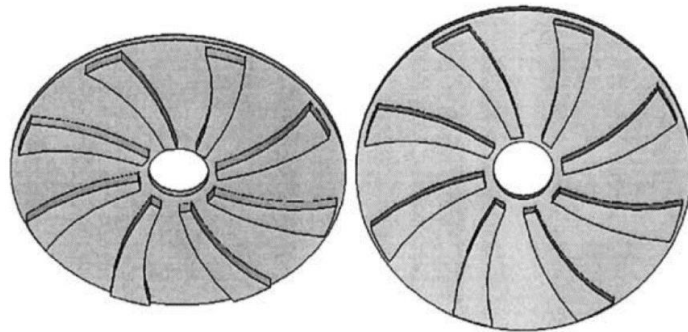
K symetrickej geometrii patrí:

- osová symetria (Obr. 19),
- rotačná symetria (Obr. 20),
- plošná (zrkadlová) symetria (Obr. 21),

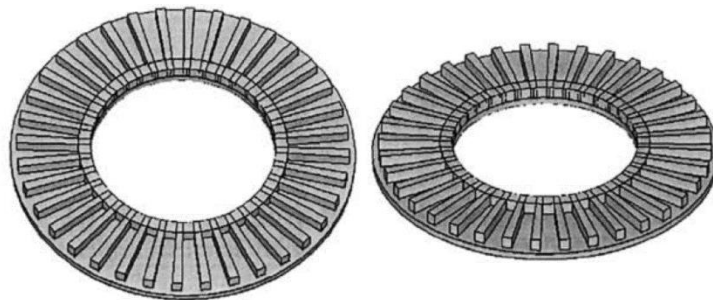
- opakujúca sa (translačná) symetria (Obr. 22).



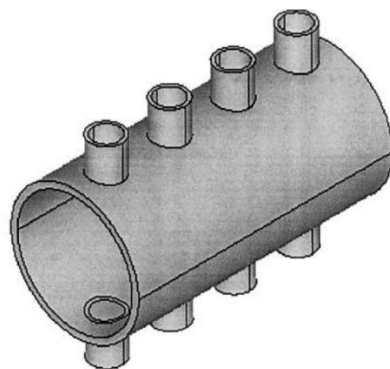
Obr. 19 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou osovej symetrie



Obr. 20 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou rotačnej symetrie



Obr. 21 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou plošnej (zrkadlovej) symetrie



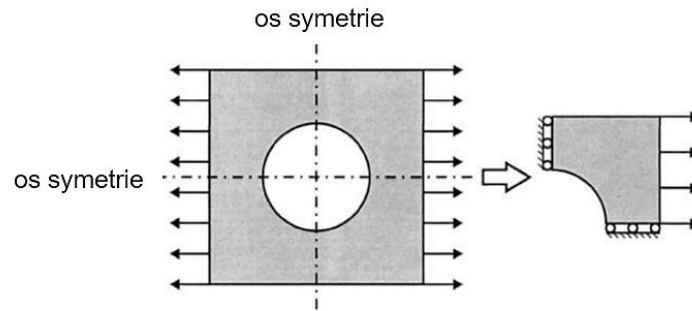
Obr. 22 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou opakujúcej

sa (translačnej) symetrie

Aplikácia podmienok symetrie z hľadiska vlastností materiálu, zaťaženia a obmedzenia

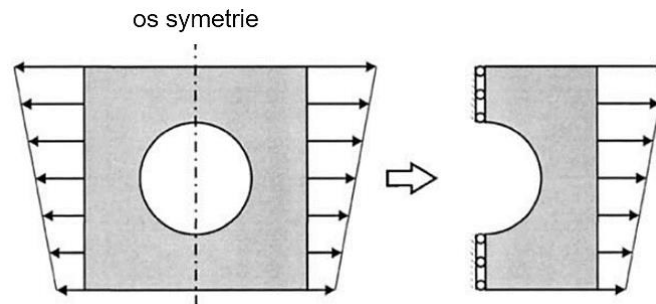
DOF

Na Obr. 23 je homogénna a izotropná štvorcová doska s otvorom v strede pri horizontálnom ťahovom zaťažení. Zaťaženie je symetrické vzhľadom na horizontálnu aj vertikálnu os. Preto je použitá len štvrtina štruktúry pri riešení.



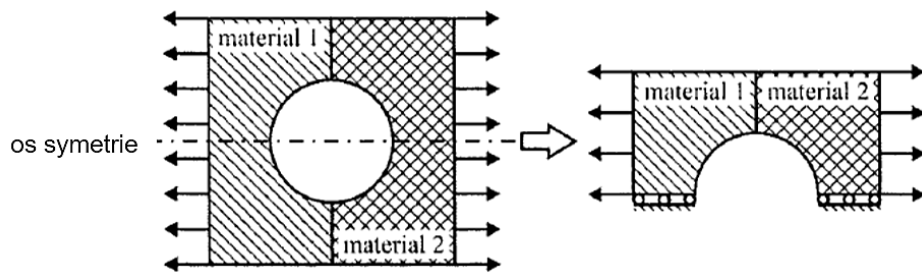
Obr. 23 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou použitia štvrtiny štruktúry

Ak sa aplikované zaťaženie mení v zvislom smere, ako je znázornené na Obr. 24, zaťaženie sa stáva symetrické len vzhľadom na vertikálnu os a vtedy je pre získanie riešenia potrebná polovica štruktúry.



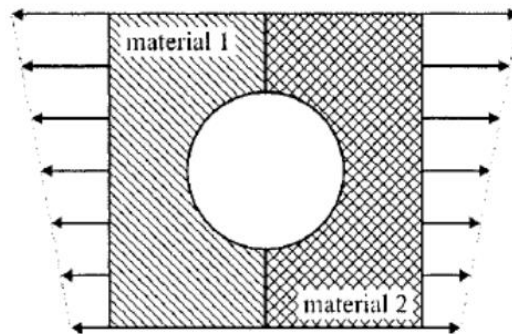
Obr. 24 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu pomocou polovice štruktúry

Na Obr. 25 je doska, zložená z dvoch rôznych materiálov. Zaťaženie umožňuje využiť štvrtinovú symetriu avšak vlastnosti materiálu sú symetrické len vzhľadom k vodorovnej osi. Preto je možné využiť len polovičnú symetriu.



Obr. 25 Ukážka zjednodušenia geometrického modelu z dvoch rôznych materiálov pomocou polovičnej symetrie

Ak je fyzikálny model podrobený horizontálnemu ťahovému zaťaženiu, ktoré sa mení vo vertikálnom smere, ako je znázornené na Obr. 26, vtedy neexistuje žiadna podmienka symetrie.

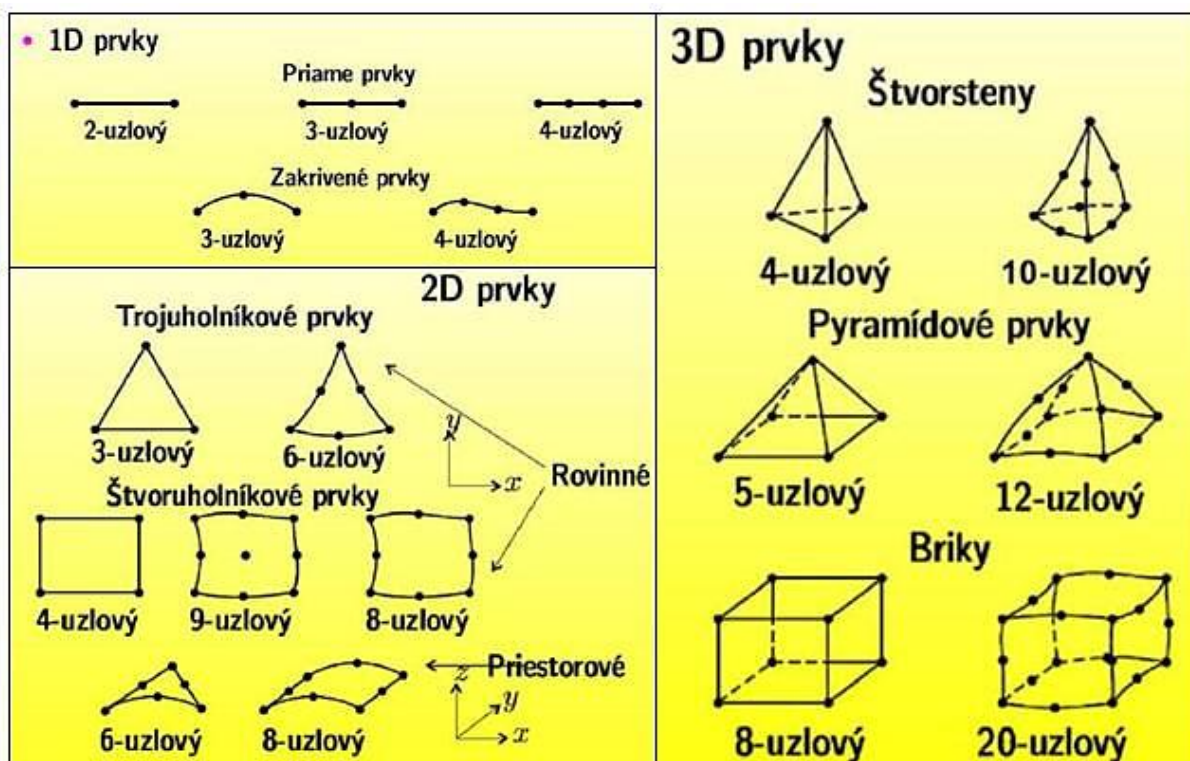


Obr. 26 Ukážka fyzikálneho modelu s premenlivým horizontálnym ťahovým zaťažením vo vertikálnom smere

Krok B – Diskretizácia skúmanej oblasti modelu (nahradenie nekonečného objemu modelu konečným počtom prvkov, resp. uzlových bodov) a generovanie siete

Na diskretizáciu modelu sa používajú rôzne typy prvkov (Obr. 27) :

- 1D prvky (prút, nosník) – čiarové (Obr. 29)
- 2D prvky (doska, škrupina) – rovinné (Obr. 30)
- 3D prvky (štvorsten, šesťsten) – objemové (Obr. 31)
- kombinácia rôznych typov prvkov.



Obr. 27 1D, 2D, 3D prvky používané na diskretizáciu skúmanej oblasti modelu [8]

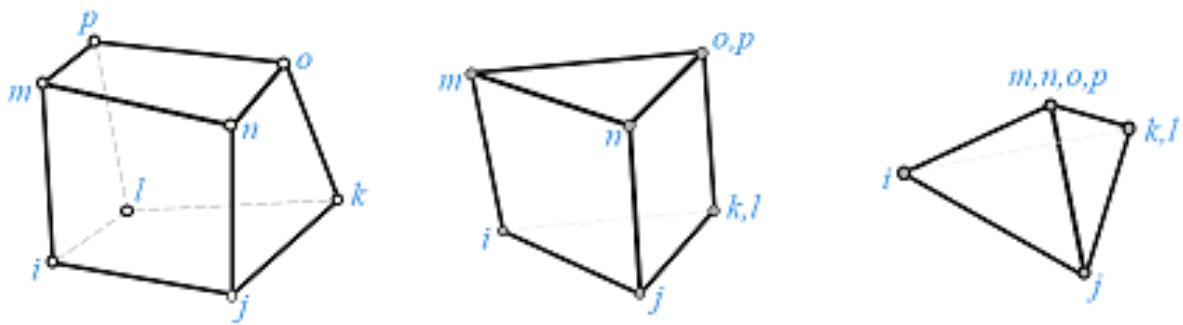
Čiarový prvok (prútový, spojovací – link) sa používa na riešenie jednorozmerných (1D) úloh poľa, keď sa primárna neznáma veličina mení len v jednom smere. Geometrický tvar diskretizovaného telesa je charakterizovaný najmä svojim dĺžkovým rozmerom, pričom veľkosť prierezovej plochy je malá. Tieto prvky môžu byť priame (dvojuzlové) alebo zakrivené (tri- až päťuzlové), s konštantným alebo premenlivým prierezom. V mechanike možno týmto prvkom modelovať prútové a nosníkové konštrukcie, laná, káble a iné konštrukčné prvky namáhané pozdĺžnym jednoosovým namáhaním. V teplotných a elektrických poliach možno týmito prvkami modelovať vodiče tepla, resp. elektrického prúdu s prevládajúcou jednosmernou vodivosťou.

Plošné prvky sa používajú na diskretizáciu oblasti s dvojrozmernou zmenou primárnej neznámej (2D elementy). Môžu byť rovinné alebo rotačne symetrické, pričom spojnice uzlových bodov môžu byť priame (3 a 4-uzlový prvok) alebo zakrivené (6-uzlový trojuholník, 8 a 9-uzlový štvoruholník).

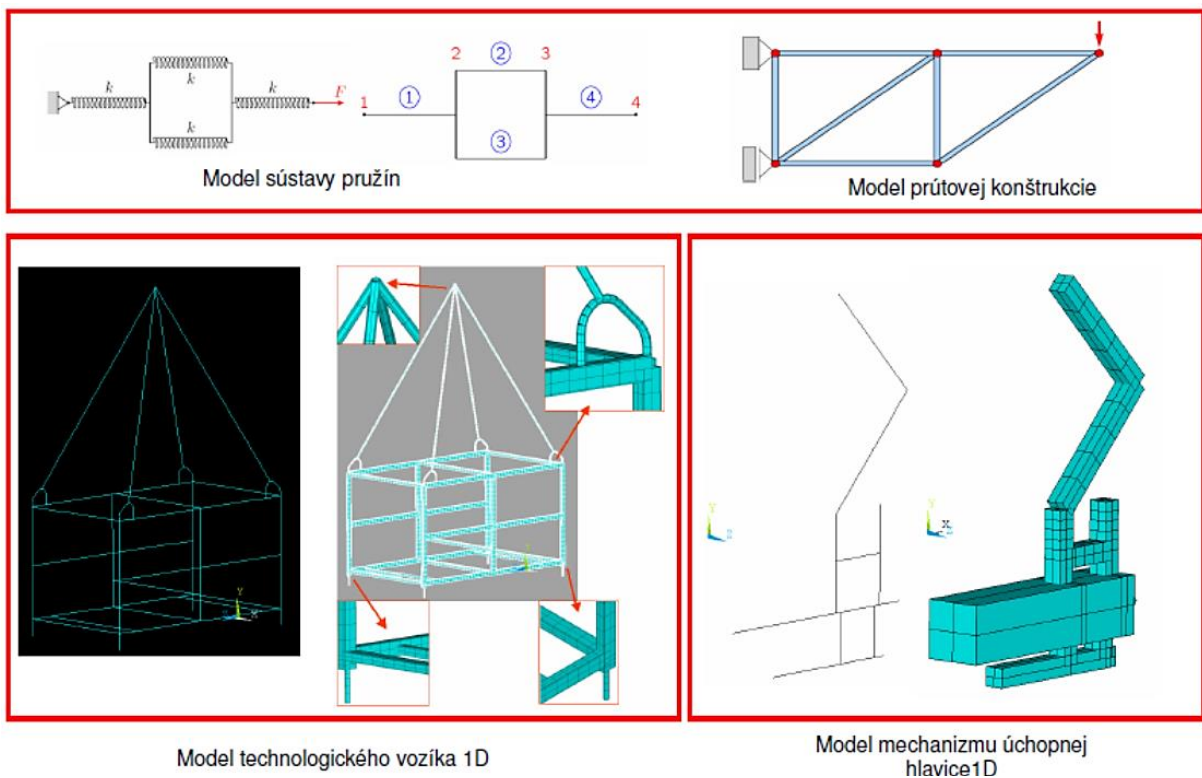
Objemové prvky (3D-elementy) sa používajú na diskretizáciu všeobecných priestorových oblastí s jednoduchou i viacnásobnou súvislosťou. Skúmaná primárna veličina sa môže meniť v bodoch skúmanej oblasti vo všeobecnom smere. Objemové prvky majú tvar ihlana alebo kvádra s rovnými alebo zakrivenými hranami. Najpoužívanejšie sú 4-uzlové a 10-

uzlové ihlany, a 8 až 21 uzlové hranoly. Prvky so zakrivenými hranami majú okrem rohových uzlov aj uzlové body v ťažiskách bočných stien ako aj v ťažisku celého objemu elementu.

Vo všeobecnosti sa prvky s priamymi hranicami označujú ako lineárne (Obr. 28) a prvky so zakrivenými hranicami ako prvky vyššieho stupňa. Súvisí to so stupňom polynómov použitých ako tvarové funkcie pri odvádzaní prvkových rovníc.



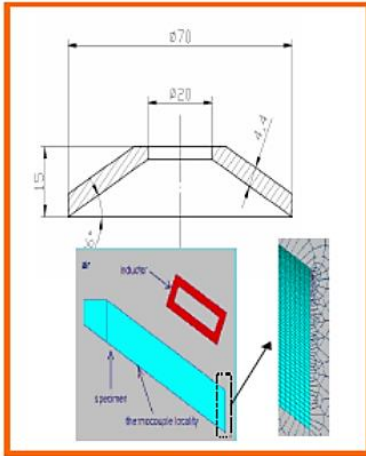
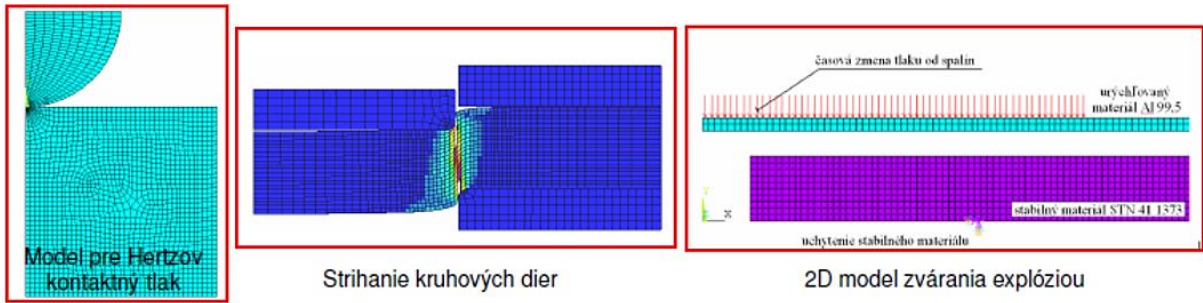
Obr. 28 Ukážka lineárnych typov prvkov [9]



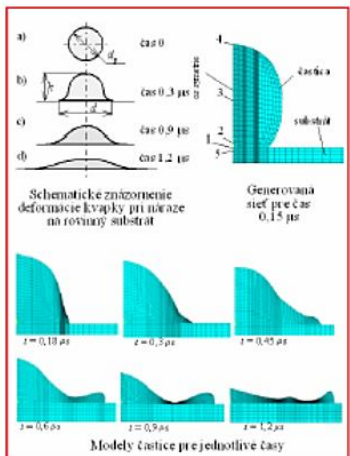
Model technologického vozíka 1D

Model mechanizmu úchopnej hlavice 1D

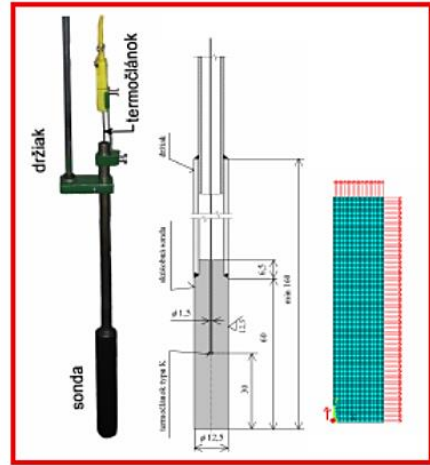
Obr. 29 Ukážka diskretizácie modelu 1D prvkami



Osovový model indukčného ohrevu

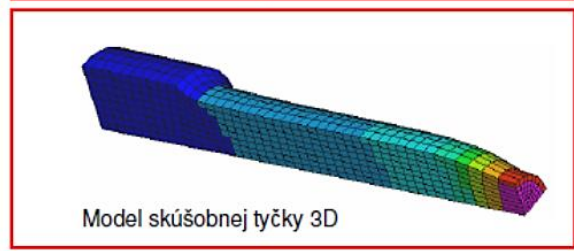
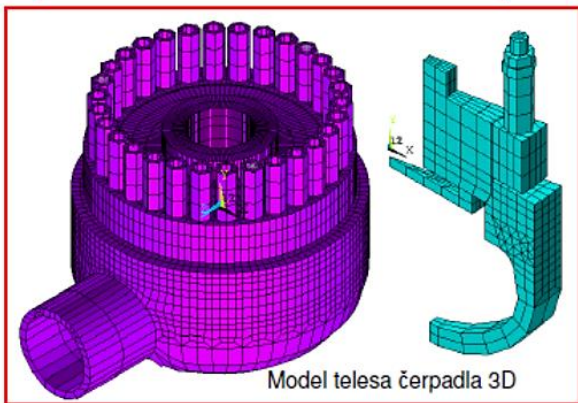
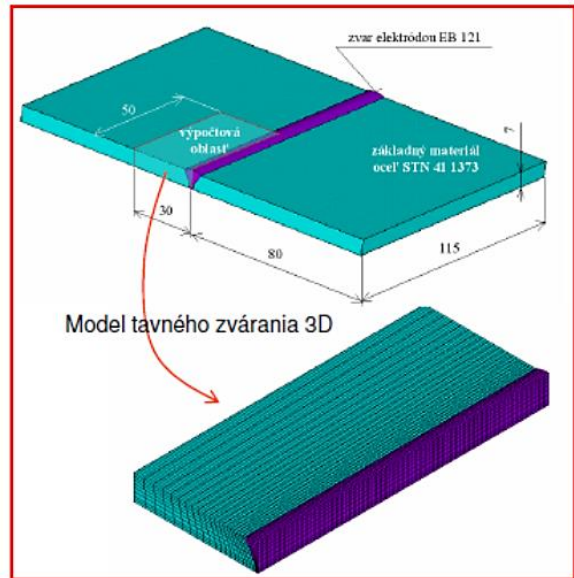
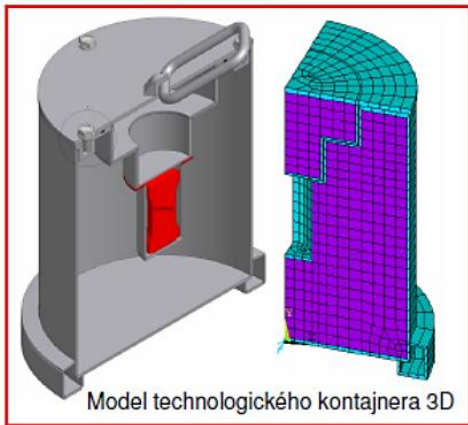


Osovový model tuhnutia kvapky kovu

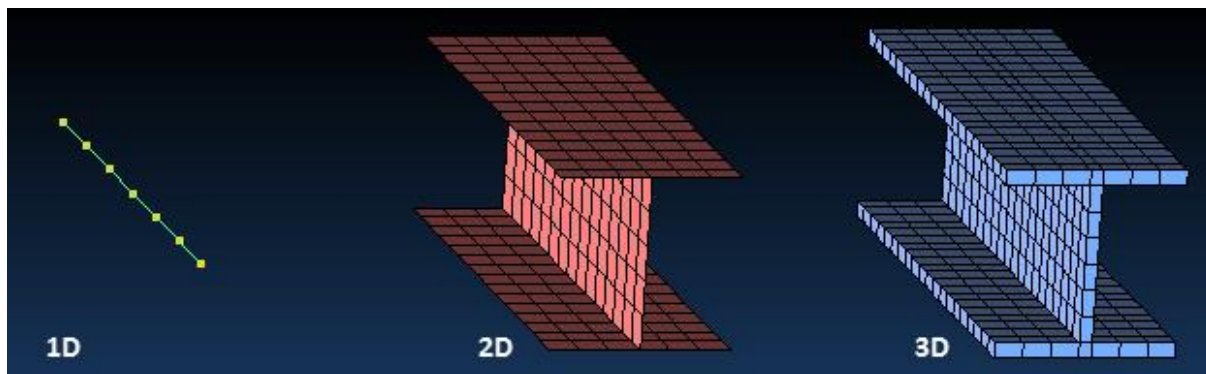


Osovový model sondy pre Wolfsonov test

Obr. 30 Ukážka diskretizácie modelu 2D prvkami



Obr. 31 Ukážka diskretizácie modelu 3D prvkami



Obr. 32 Diskretizácia modelu využitím rôznych typov prvkov,
1D – čiarové, 2D – rovinné, 3D – objemové [9]

Generovanie siete sa realizuje:

- zvnútra telesa smerom k jeho obvodovým stenám,
- z hraničných plôch dovnútra objemu telesa.

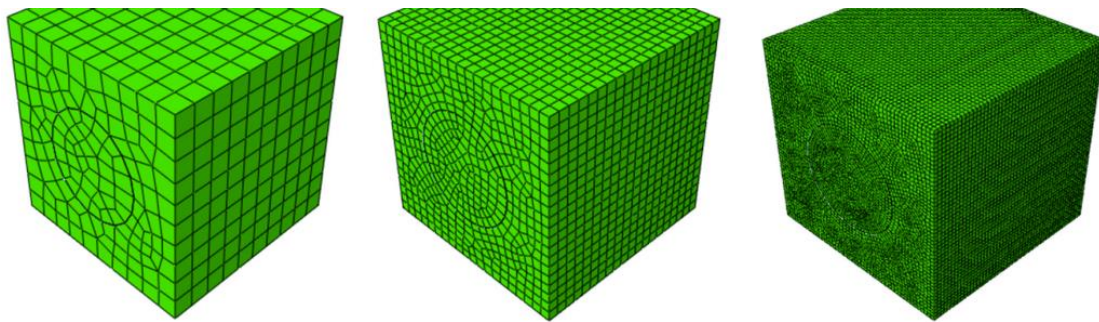
Sieť konečných prvkov možno vytvoriť čiarovo (čiary tvoria osi profilov) a priradiť im prierez. Tento variant je jednoznačne najrýchlejší, ale neposkytuje priebeh napätí po priereze (Obr. 32). Ďalšou možnosťou je vytvoriť škrupinový model z plôch a priradiť týmto plochám hrúbku (Obr. 32). Toto je druhý najrýchlejší variant, ale nie vždy umožňuje verne zadefinovať prierez. Poslednou možnosťou je plne objemový model, ktorý poskytne najreálnejší výsledok (Obr. 32). Takto vytvorený model je ale veľmi náročný na výkon počítača a jednoznačne trvá najdlhšie.

Pre 3D modely:

- každý uzol objemového prvku má 3 stupne voľnosti (platí pre štruktúrne úlohy),
- pomer tvoriacich strán by mal byť 1:1:1,
- 5 stenové prvky sa najčastejšie používajú ako prechodové.

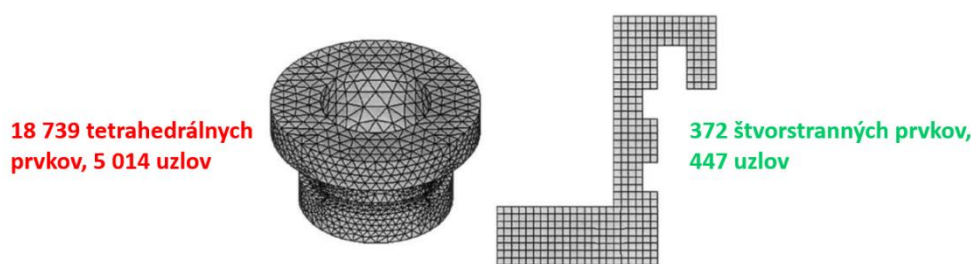
Komerčné programy obsahujú veľké množstvo ďalších špeciálnych prvkov, ktorých použitie je materiálovo, geometricky a fyzikálne orientované.

S generovaním siete konečných prvkov úzko súvisí aj jej hustota (Obr. 33). Všeobecne platí, že veľké množstvo prvkov poskytuje lepšiu aproximáciu riešenia. V niektorých prípadoch však môže nadmerný počet prvkov zvýšiť chybu zaokrúhlenia. Preto je dôležité, aby bola sieť primerane jemná alebo hrubá v príslušných oblastiach. Aké jemná alebo hrubá by mala byť sieť v takýchto oblastiach je ďalšou dôležitou otázkou. Bohužiaľ, definitívne odpovede na otázky o zdokonalení siete nie sú k dispozícii, pretože sú závislé na konkrétnom fyzickom systéme. Existujú však niektoré techniky, ktoré môžu pomôcť pri odpovedaní na tieto otázky:



Obr. 33 Ukážka rôznej hustoty siete [10]

Na Obr. 34 je trojrozmerná sieť konečných prvkov štruktúry, ktorá obsahuje 18 739 tetrahedrálnych prvkov s 5 014 uzlami. Avšak dvojrozmerné oko priečného prierezu má len 372 štvorstranných prvkov a 447 uzlov. Použitie symetrie v tomto prípade znižuje procesorový čas potrebný na riešenie pri rovnakej úrovni presnosti výsledkov.



Obr. 34 Ukážka použitia symetrie pre zníženie procesorového času a rovnakej presnosti výsledkov

Všeobecne platí, že veľké množstvo prvkov poskytuje lepšiu aproximáciu riešenia. V niektorých prípadoch však môže nadmerný počet prvkov zvýšiť chybu zaokrúhlenia. Preto je dôležité, aby bola sieť primerane jemná alebo hrubá v príslušných oblastiach. Ďalšou dôležitou otázkou je aká jemná alebo hrubá by mala byť sieť v takýchto oblastiach. Neexistujú jednoznačné odpovede na otázky o zdokonalení siete, pretože to závisí od konkrétneho fyzikálneho systému. Niektoré špeciálne techniky môžu pomôcť odpovedať na tieto otázky:

a) Adaptívne sieťovanie – je používaná technika generovania siete, keď vytvorená sieť musí spĺňať potrebné kritériá odhadu chýb energie. Používateľ si nastaví „prijateľnú“ chybu. Tento typ sieťovania je dostupný len pre lineárne statické štruktúrne analýzy a teplotné analýzy v ustálenom stave.

b) Skúška spresnenia siete v rámci Ansys-u – technika generovania siete, keď sa najprv vykoná analýza s počiatočnou hustotou siete a potom sa znova analyzuje použitím dvojnásobného počtu prvkov. Ak sú výsledky obidvoch porovnávaných riešení blízke, potom

je počiatočná hustota siete považovaná za primeranú. Ak existujú podstatné rozdiely medzi týmito dvoma hustotami siete, analýza pokračuje s vylepšenou hustotou siete a následným porovnaním, až kým sa nedosiahne konvergencia.

c) **Submodelovanie** – ak zhust'ovanie siete prináša takmer identické výsledky pre väčšinu oblastí a podstatné rozdiely v určitej časti modelu, na miestne zhustenia siete sa v ANSYS-e používa vstavaná funkcia „submodelling“.

Krok C – Pre každý diskretný bod sa získajú 3 rovnice – polia posunov do všetkých smerov (x, y, z) a snahou je spočítať pole deformácií (6 rovníc) a pole napätí (6 rovníc)

Príklad nárastu počtu stupňov voľnosti uzlov v závislosti od typu úlohy:

rovinná úloha: $20 \times 20 = 400$ uzlov $\times 2$ voľnosti na uzol = 800 rovníc

priestorová úloha: $20 \times 20 \times 20 = 8000 \times 3 = 24000$ rovníc

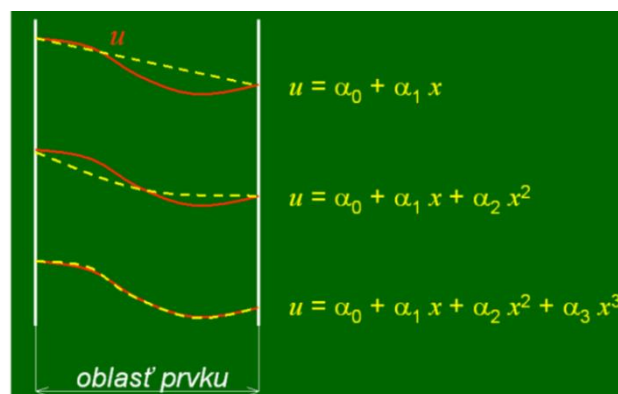
Krok D – Nahradenie funkcie posuvov polynómom a vyjadrenie funkcie posuvov (interpolačnou tvarovou funkciou).

Interpolačná tvarová funkcia určuje vzťah medzi primárnymi neznámymi vo vnútri prvku a v jeho uzlových bodoch.

Najčastejšie používanými interpolačnými funkciami sú lineárne polynómy, Lagrangeove polynómy, atď. (Obr. 35).

Výhody polynómov ako interpolačných funkcií:

- ľahko sa derivujú a integrujú,
- presnosť aproximácie je možné zvýšiť rádom polynómu,
- majú spojité derivácie.



Obr. 35 Polynómy ako interpolačné funkcie [11]

Krok E – Zavedenie okrajových podmienok

Krok F – Výpočet sústavy lineárnych algebraických rovníc

Krok G – Výpočet deformácií a napätí pre jednotlivé uzlové body

FEM využíva **dva** všeobecné **priame prístupy** pri riešení problémov so štruktúrnou mechanikou:

1. Metóda sily – hľadané sú neznáme vnútorné sily. Na získanie riadiacich rovníc sa použijú najprv rovnice rovnováhy. Potom je potrebné pridať ďalšie rovnice, ktoré sa získajú zavedením rovníc kompatibility. Výsledok je súbor algebraických rovníc na určenie nadbytočných alebo neznámych vnútorných síl.

2. Metóda posunutí alebo tuhosti – túto metódu používa väčšina softvérových programov. Hľadané sú neznáme posunutia uzlov. Napríklad sú zavedené počiatočné podmienky, ktoré vyžadujú, aby prvky spojené so spoločným uzlom, spoločne so spoločným okrajom alebo na spoločnom povrchu pred zaťažením zostali spojené s týmto uzlom, hranou alebo povrchom po uskutočnení deformácie. Potom sú riadiace rovnice vyjadrené v zmysle uzlových posunov pomocou rovníc rovnováhy a použiteľného zákona vzťahujúceho sa na sily na posunutia. Počas riešenia úlohy softvér zostavuje riadiace algebraické rovnice v maticovej forme pre nový prvok a vypočítava neznáme hodnoty primárnej premennej. Vypočítané hodnoty sa potom použijú spätnou substitúciou na výpočet ďalších odvodených premenných (reakčné sily, prvky napätia, teplo).

Pretože je bežné, že model elementu je reprezentovaný desiatkami tisíc rovnicami, používajú sa špeciálne techniky riešenia minimalizácie požiadaviek na ukladanie údajov a výpočtového času.

Krok H – Väčšinou grafické zobrazenie na modeli s výpisom dôležitých hodnôt

Zabezpečuje vyhodnotenie výsledkov riešenia vo forme tabuliek, grafov a grafických máp (izočiary, izoplochy apod.). Postprocesorový softvér obsahuje sofistikované rutiny, ktoré sa používajú na triedenie, tlač a vykresľovanie vybraných výsledkov riešenia. Kým údaje o riešení môžu byť spracované mnohými spôsobmi v postprocesore, najdôležitejšou úlohou

riešiteľa je tieto výsledky klasifikovať a využiť ich na optimalizáciu riešeného problému. Správne technické posúdenie si vyžaduje značnú odbornú erudovanosť riešiteľa.

Postprocesorové operácie:

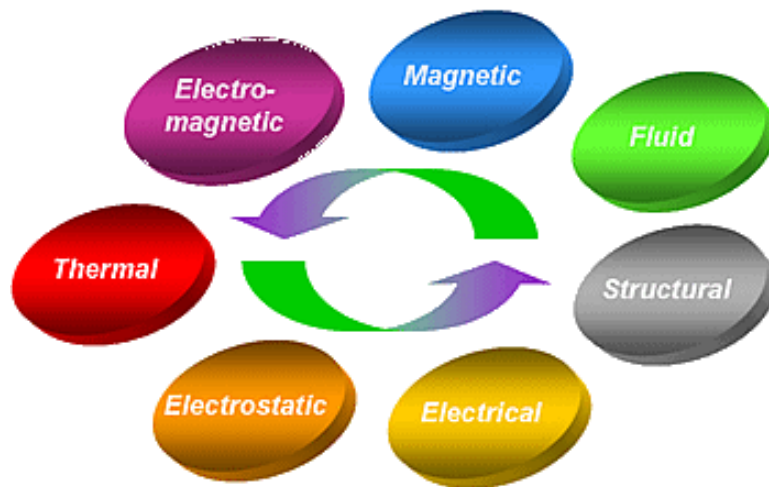
- Vizualizácia deformovanej štruktúry
- Veľkosť posunutia v troch smeroch
- Veľkosť uzlového napätia
- Veľkosť napätia prvku
- Kontrola rovnováhy
- Faktor bezpečnosti
- Energia kmeňa
- Prirodzená frekvencia
- Amplitúda
- Časová história
- Tepelné napätie a namáhanie
- Vykreslenie deformovaného konštrukčného tvaru
- Animácia dynamického správania modelu
- Vytváranie farebne kódovaných teplotných grafov.

3.4 Aplikácia FEM

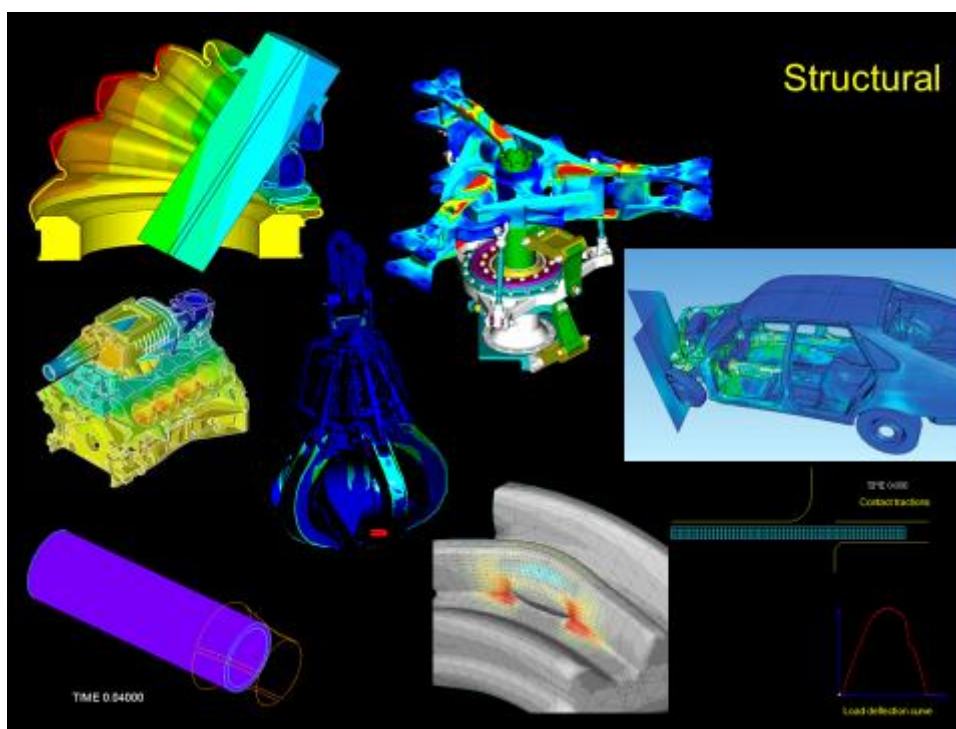
FEM nachádza uplatnenie v mnohých odboroch pri vývoji produktov, spravidla v oblasti strojného inžinierstva (napr. letecký a automobilový priemysel, biomechanika) Obr. 36. Niektoré moderné programy FEM obsahujú špecifické nástroje (tepelné, elektromagnetické, fluidné a štrukturálne simulácie):

- Pružnosť a pevnosť (Obr. 37),
- Dynamika (Obr. 38),
- Lomová mechanika,
- Flexibilná kinematika,
- Prenos tepla (Obr. 39),
- Simulácia zväracích procesov,
- Problém polí (Obr. 40),
- Akustika (Obr. 41),
- MEMS (MicroElectroMechanical Systems) (Obr. 42),
- Prúdenie (Obr. 43),
- Biomechanika (Obr. 44),

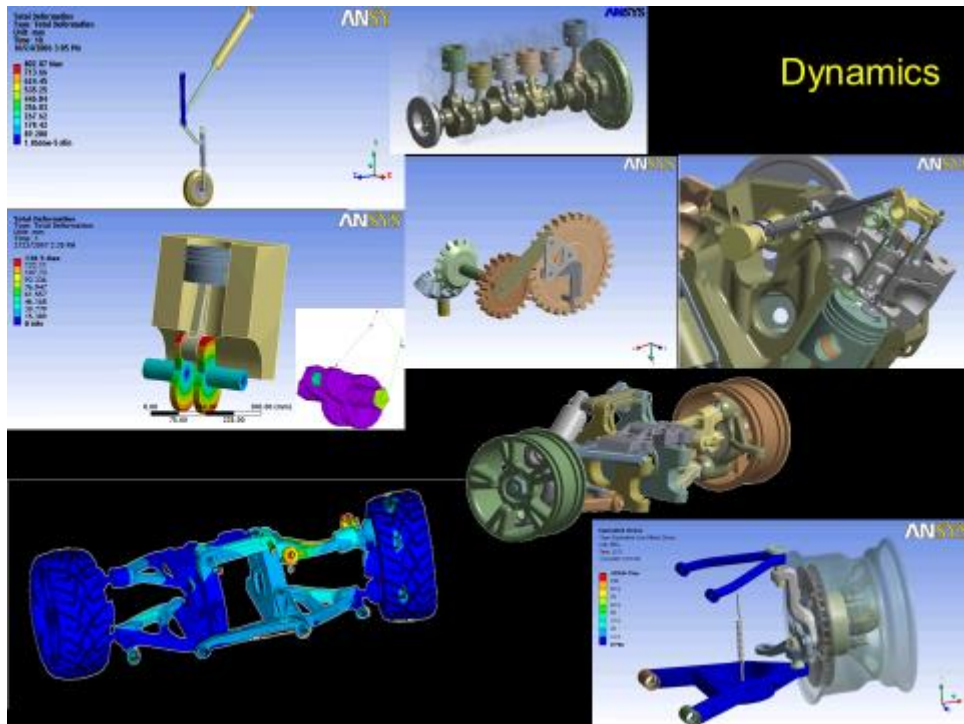
- Multifyzikálne problémy (Obr. 45).



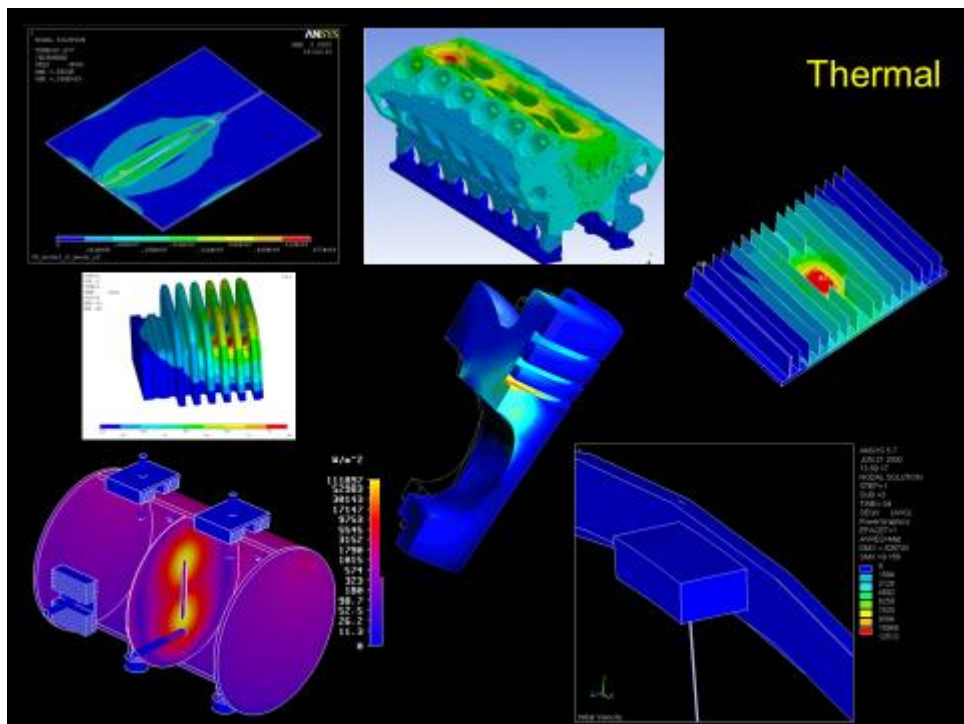
Obr. 36 Oblasti využitia FEM



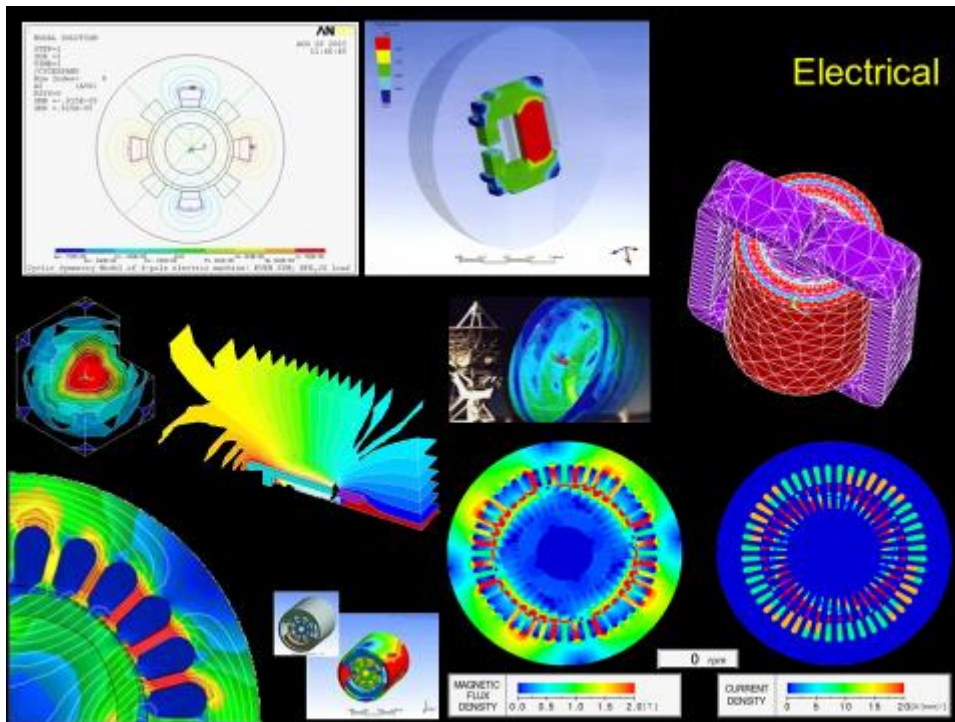
Obr. 37 Ukážky štruktúrnych simulácií v FEM



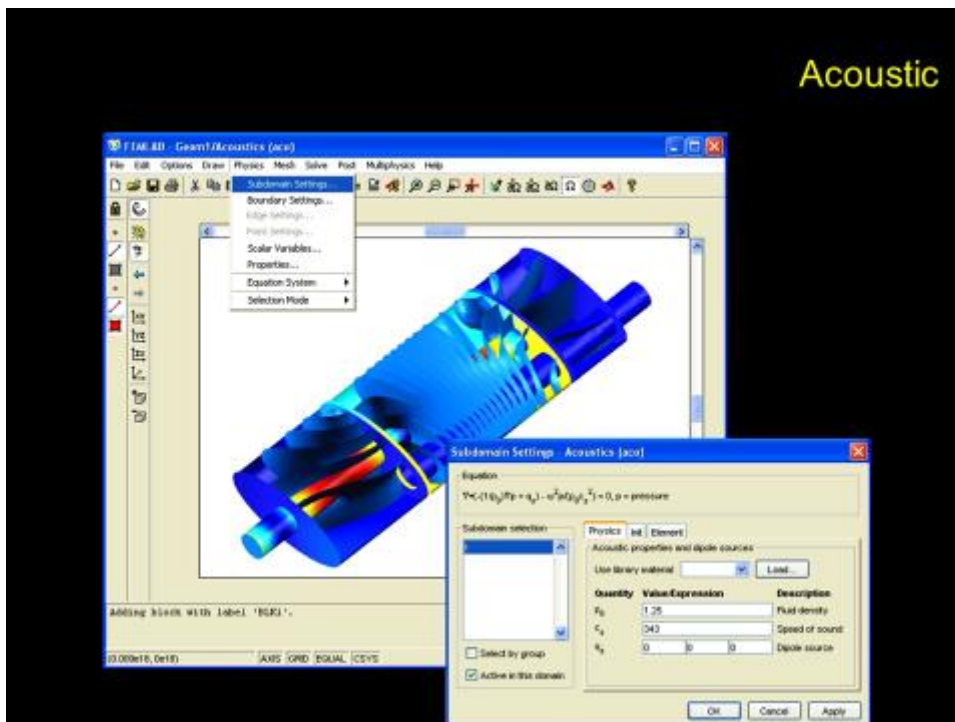
Obr. 38 Ukázky dynamických simulací v FEM



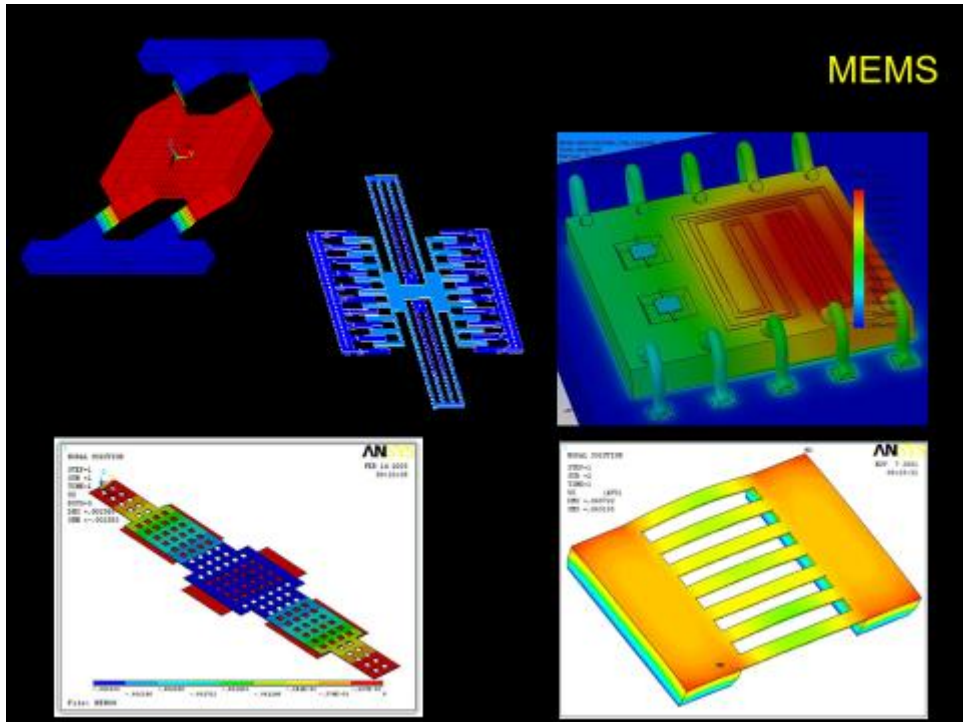
Obr. 39 Ukázky tepelných simulací v FEM



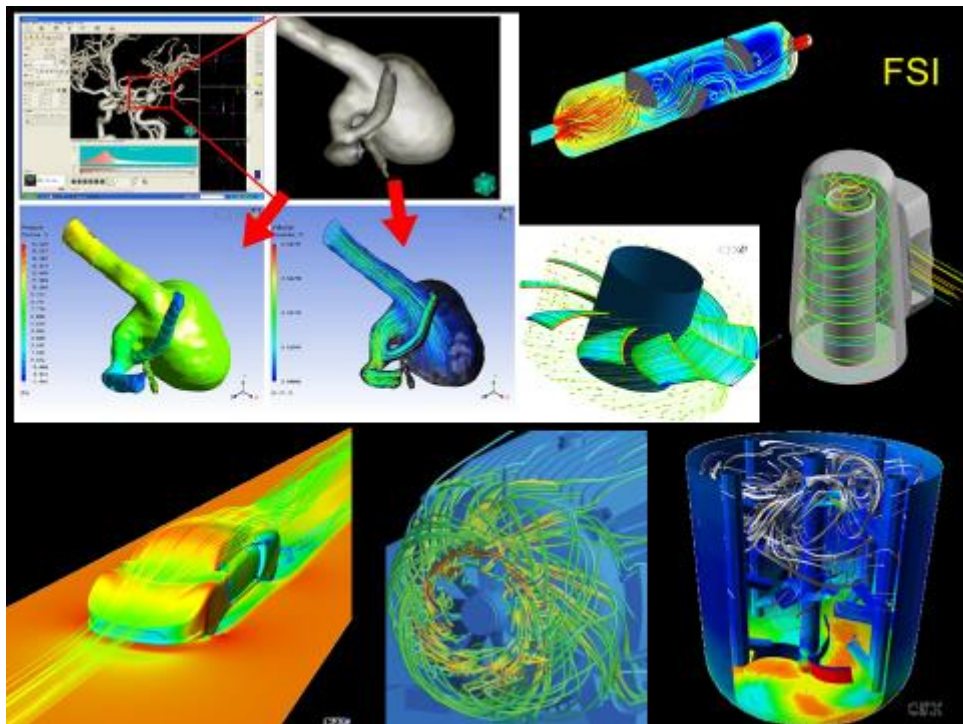
Obr. 40 Ukážky elektromagnetických simulácií v FEM



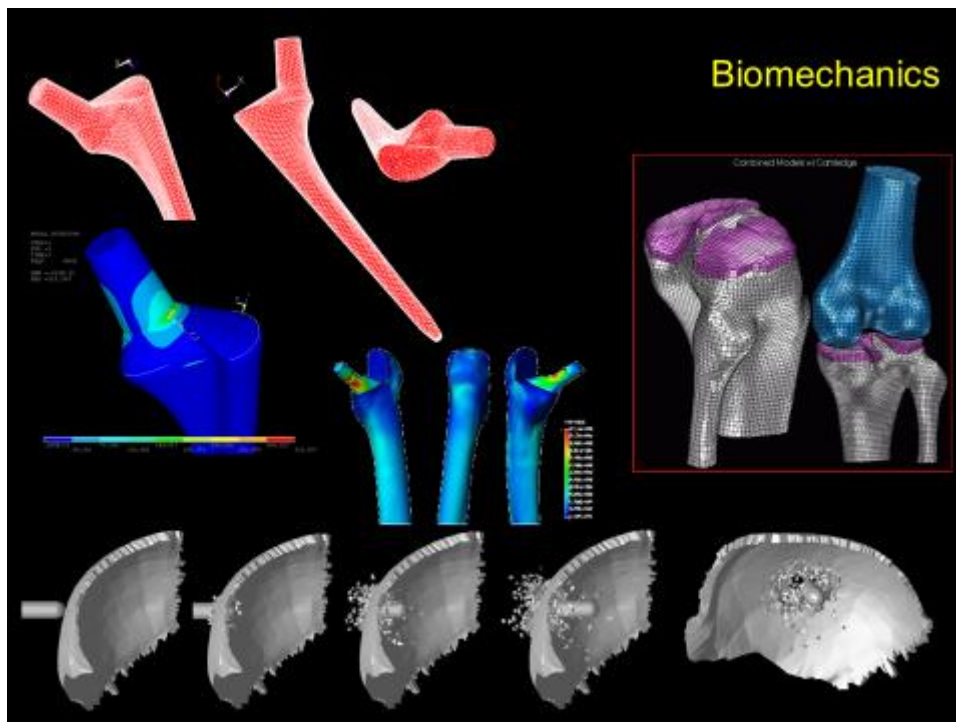
Obr. 41 Ukážka akustickej simulácie v FEM



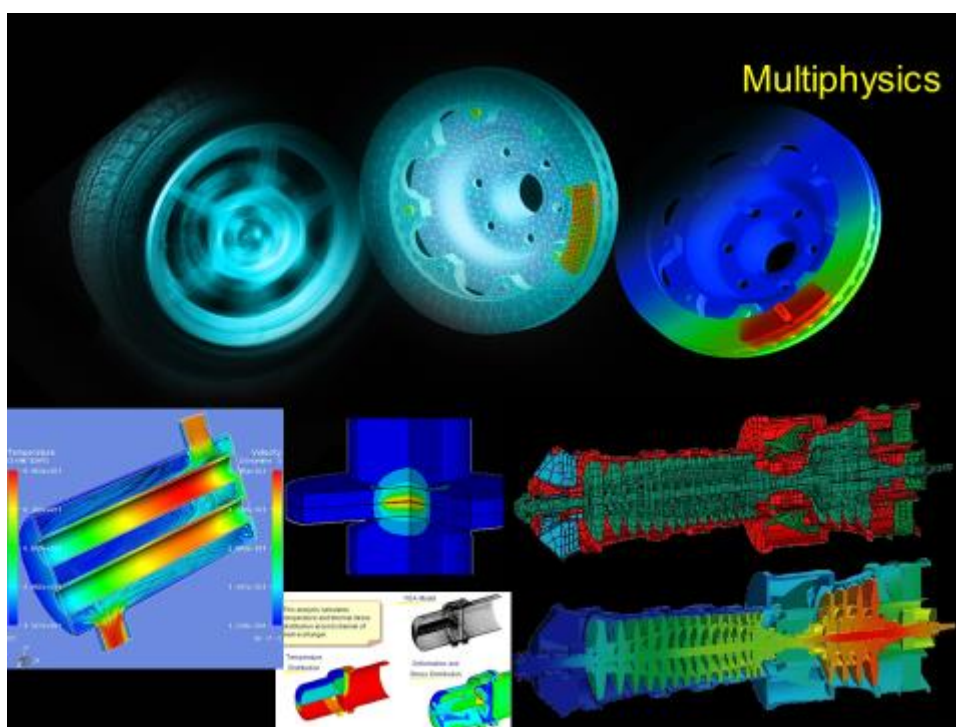
Obr. 42 Ukázky MEMS simulací v FEM



Obr. 43 Ukázky fluidných simulácií v FEM



Obr. 44 Ukážky biomechanických simulácií v FEM



Obr. 45 Ukážky multifyzikálnych simulácií v FEM

3.4.1 Výhody FEM

FEM umožňuje detailné zobrazenie štruktúr pri ohýbaní alebo krútení, kompletný návrh, testovanie a optimalizáciu ešte pred vyrobením prototypu. Tento mocný nástroj pre navrhovanie výrazne zlepšil aj úroveň technických výkresov a spôsob konštruovania v

mnohých priemyselných aplikáciách. Zavedením FEM sa výrazne znížil čas, od pôvodného návrhu k hotovému výrobku. Stručne povedané, k výhodám FEM patrí predovšetkým virtuálne prototypovanie, menej fyzických prototypov, rýchlejší a menej nákladný konštrukčný cyklus, zvýšenie produktivity a zníženie nákladov.

Zdroje chýb FEM

- vyvolané zjednodušením úlohy
- vyvolané diskretizáciou spojitej oblasti
- chyby použitej numerickej metódy
- chyby spôsobené obmedzenou aritmetikou počítača

Výhody výpočtových metód CAD systémov

- Skrátenie vývojového času
- Zníženie výrobných nákladov na zavedenie do výroby
- zvyšovanie kvality
- Inovácia, dodržiavanie noriem, ...

3.5 Výpočtové systémy

K najviac známym a používaným (špecializovaným) systémom možno zaradiť: Abaqus, MSC Adams, ANSYS Mechanical Enterprise, ANSYS Fluent, Ansys LS-DYNA, FORGE, MSC Marc, MSC Nastran, PAM-Crash.

3.5.1 Abaqus

Je pokročilý softvér na analýzu konečných prvkov (FEM), ktorý patrí medzi najuznávanejšie a najpoužívané nástroje v oblasti inžinierskej simulácie a modelovania. Vyvinutý spoločnosťou Dassault Systèmes [12]. Abaqus je známy svojou flexibilitou a schopnosťou riešiť široké spektrum inžinierskych problémov, od statických a dynamických analýz až po špecifické aplikácie v oblasti multifyzikálnych simulácií.

Kľúčové vlastnosti Abaqus:

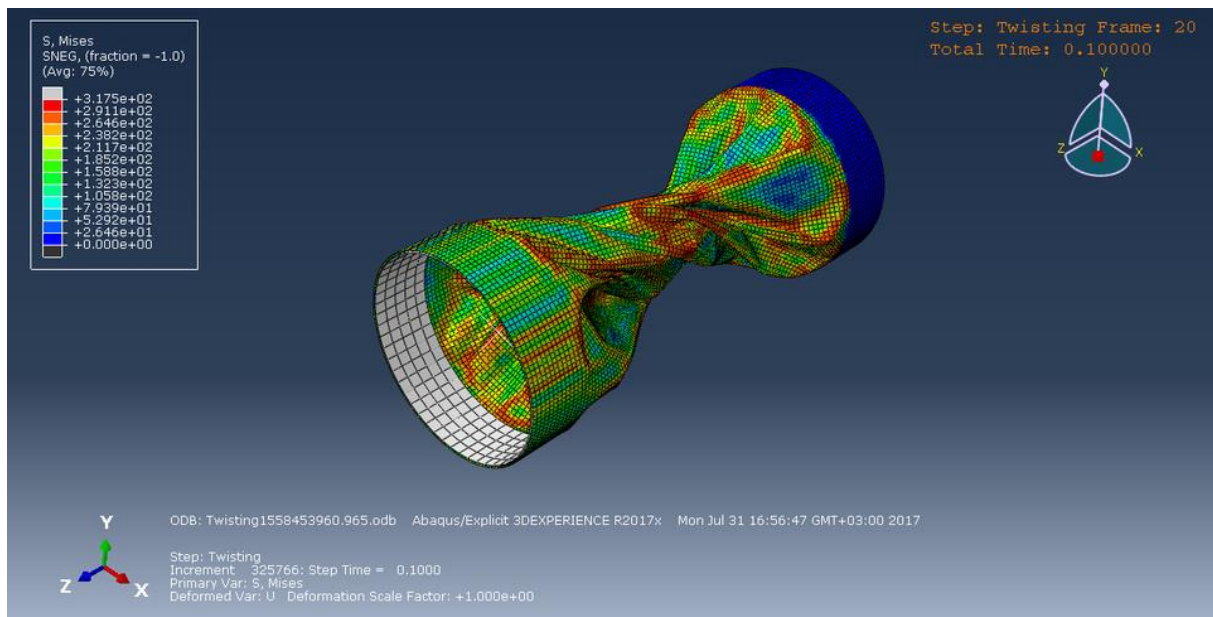
- **Rozsiahla analýza konečných prvkov (FEM):** Softvér podporuje rôzne typy analýz, vrátane statických, dynamických, tepelných a únavových analýz. Umožňuje modelovanie komplexných štruktúr a materiálov, vrátane nelineárnych a časovo závislých problémov.

- **Flexibilné modelovanie materiálov:** Softvér poskytuje rozsiahle možnosti pre definovanie a modelovanie materiálových vlastností, vrátane plastickej deformácie, viskózneho správania a iných špecifických vlastností materiálov. Môže simulovať správanie rôznych typov materiálov, vrátane kompozitov, elastomérov a kovov.
- **Multifyzikálne simulácie:** Softvér umožňuje integráciu rôznych fyzikálnych fenoménov, ako sú interakcie medzi štruktúrami a tekutinami (FSI – Fluid-Structure Interaction), ako aj chemické a tepelné procesy, čo z neho robí vhodný nástroj pre komplexné inžinierske aplikácie.
- **Jednoduché a pokročilé rozhranie:** Softvér poskytuje intuitívne používateľské rozhranie s grafickými nástrojmi pre modelovanie, analýzu a vizualizáciu výsledkov. Umožňuje inžinierom rýchlo a efektívne vytvárať a analyzovať modely.
- **Integrácia s inými nástrojmi:** Softvér je súčasťou platformy Dassault Systèmes, čo umožňuje integráciu s inými softvérovými nástrojmi, ako je CATIA a SIMULIA, a zdieľanie údajov medzi rôznymi fázami návrhu a analýzy.

Typické aplikácie Abaqus:

- **Automobilový priemysel:** Simulácia crash testov, analýza deformácií karosérií a komponentov, optimalizácia dizajnu pre zlepšenie bezpečnosti a výkonnosti.
- **Letecký priemysel:** Modelovanie a analýza štruktúrnych komponentov lietadiel, ako sú krídla a trup, pri rôznych zaťažovacích podmienkach.
- **Stavebníctvo:** Vyhodnocovanie stability a pevnosti budov, mostov a iných inžinierskych stavieb pod rôznymi vonkajšími vplyvmi.
- **Energetika:** Simulácie správania sa komponentov v energetických systémoch, ako sú turbíny a generátory, pri analýze tepelných a mechanických cyklov.
- **Zdravotná technika:** Modelovanie biomechanických systémov, ako sú implantáty a ortopedické pomôcky, vrátane analýzy interakcií medzi implantátmi a okolitými tkanivami.

Softvér Abaqus je cenným nástrojom pre inžinierov a dizajnérov, ktorí potrebujú presné a efektívne simulácie na optimalizáciu a zlepšovanie návrhov. Jeho schopnosť riešiť zložené inžinierske úlohy a integrácia s inými softvérovými nástrojmi robí z neho neoceniteľného partnera v procese vývoja a inovácie v rôznych odvetviach priemyslu. Ukážka simulácie v Abaqus/CAE je na Obr. 46.



Obr. 46 Ukážka simulácie v Abaqus/CAE [13]

3.5.2 MSC Adams

Je to softvérový nástroj na simuláciu multibody dynamics (MBD), ktorý umožňuje inžinierom analyzovať a predpovedať správanie mechanických systémov, ktoré pozostávajú z viacerých pohyblivých komponentov [14]. Je široko využívaný v rôznych priemyselných odvetviach, vrátane automobilového, leteckého, robotického a strojárkeho priemyslu, na modelovanie a simuláciu komplexných systémov a mechanických interakcií.

Kľúčové vlastnosti MSC Adams:

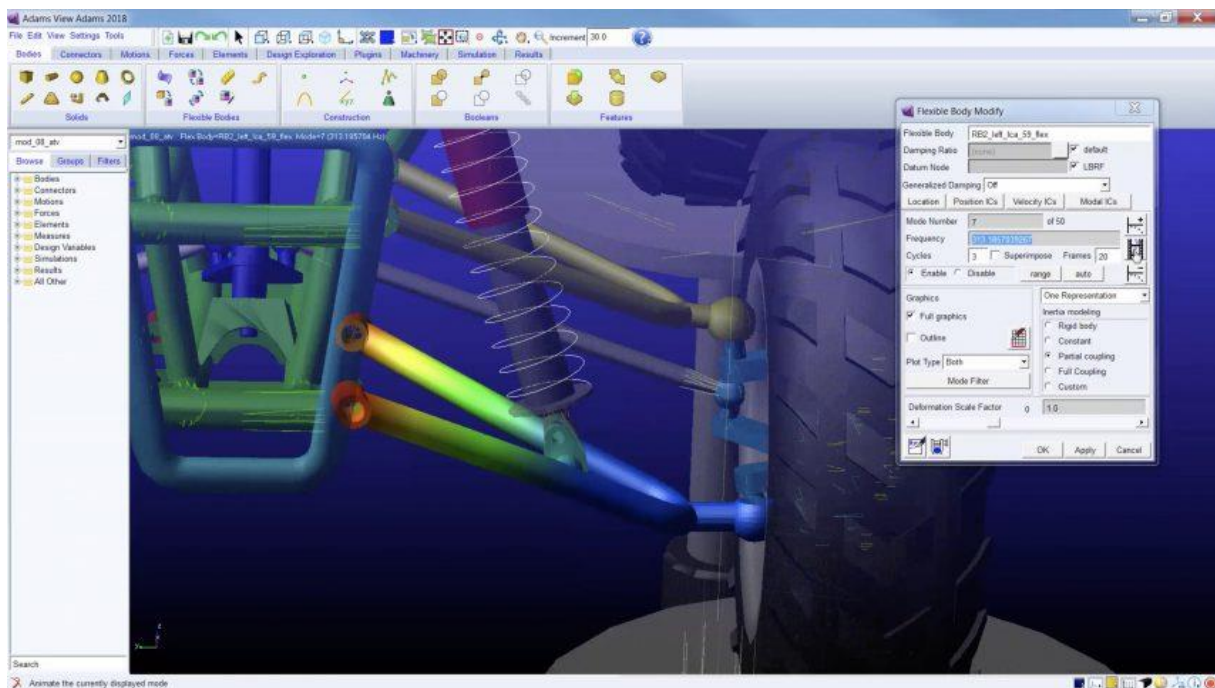
- **Multibody Dynamics (MBD):** Softvér je špecializovaný na analýzu multibody dynamiky, čo znamená, že dokáže simulovať pohyby a interakcie viacerých rigidných a deformovateľných komponentov v rámci jedného mechanického systému.
- **Flexibilita a presnosť:** Softvér umožňuje kombinovať analýzy rigidných aj flexibilných komponentov, čo zaisťuje presné a realistické simulácie aj v prípade komplexných mechanických štruktúr a zariadení.
- **Intuitívne modelovanie:** Softvér ponúka používateľsky prívetivé grafické rozhranie, ktoré umožňuje inžinierom rýchlo vytvárať a upravovať modely pomocou vizuálnych nástrojov. Tento prístup umožňuje jednoduchšie zachytávanie a spravovanie geometrie a definovanie pohybových spojení.
- **Rôzne typy simulácií:** Softvér podporuje rôzne typy simulácií, vrátane statických analýz, dynamických analýz, analýz stability a optimalizácie návrhu. Inžinieri môžu simulovať správanie systémov pri rôznych prevádzkových podmienkach a zaťaženiach.

- **Integrácia s inými softvérmi:** Softvér je kompatibilný s ďalšími produktmi MSC Software a inými CAD/CAE nástrojmi, čo umožňuje jednoduché prepojenie s existujúcimi pracovnými postupmi a softvérmi na analýzu konečných prvkov (napr. MSC Nastran).

Typické aplikácie MSC Adams:

- **Automobilový priemysel:** Simulácia správania vozidiel, testovanie systémov odpruženia a riadenia, optimalizácia dynamických vlastností automobilov.
- **Letecký priemysel:** Analýza pohybu a interakcií v leteckých systémoch, vrátane mechanizmov krídiel a podvozkov.
- **Robotika:** Modelovanie a simulácia pohybových dráh robotov a manipulátorov, analýza interakcií medzi robotmi a ich prostredím.
- **Strojárstvo:** Vytváranie modelov a simulácia strojových zariadení, analýza mechanických spojení a interakcií medzi súčiastkami.

MSC Adams je kľúčovým nástrojom pre inžinierov a návrhárov, ktorí potrebujú simulovať a optimalizovať komplexné mechanické systémy. Jeho schopnosti v oblasti multibody dynamiky a flexibilita pri modelovaní robia z neho neoceniteľného pomocníka pri vývoji a inováciách v rôznych priemyselných odvetviach. Ukážka simulácie v Adams je na Obr. 47.



Obr. 47 Ukážka simulácie v Adams [15]

3.5.3 ANSYS Mechanical

Je to robustný softvérový nástroj určený na štruktúrnú analýzu a simuláciu, ktorý sa široko využíva v oblasti inžinierstva a výskumu. Je súčasťou platformy ANSYS a poskytuje komplexné riešenia pre analýzu pevnosti, stability a dynamického správania štruktúr a mechanických systémov. ANSYS Mechanical [16] sa používa na modelovanie a simuláciu rôznych inžinierskych problémov, vrátane napätia, deformácií, únavy a interakcií medzi štruktúrami a inými fyzikálnymi javmi.

Kľúčové vlastnosti ANSYS Mechanical:

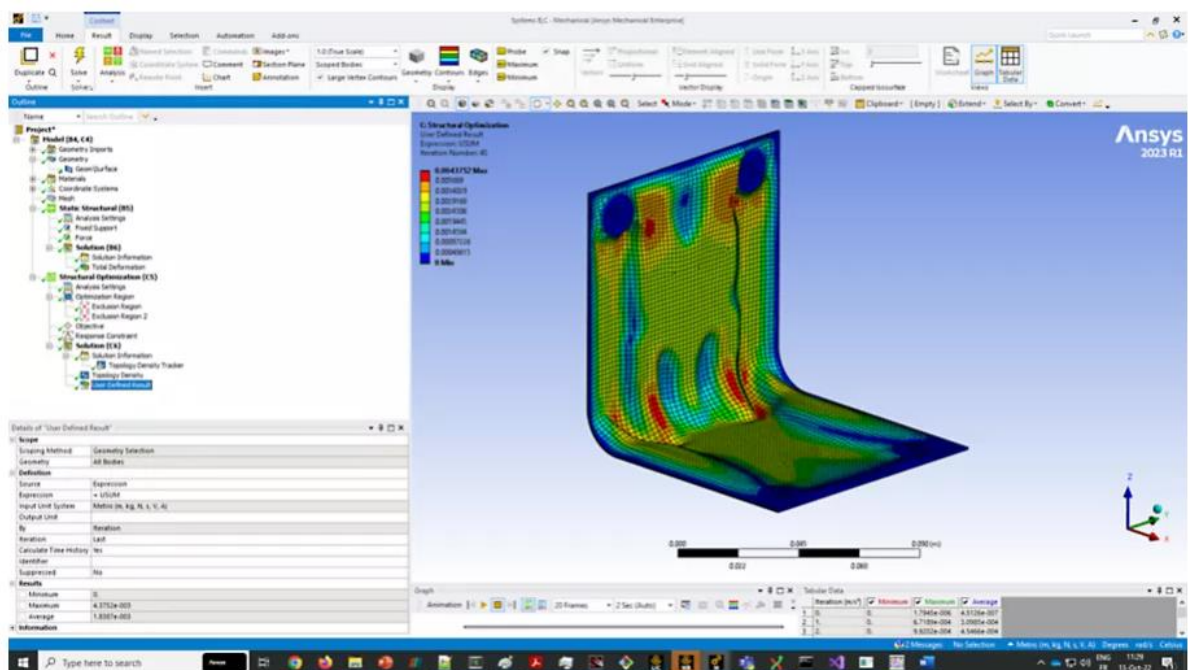
- **Štruktúrna analýza:** Softvér umožňuje podrobne analyzovať štruktúry pod rôznymi typmi zaťaženia, ako sú statické, dynamické, tepelné a únavové. Môže simulovať reakcie materiálov na rôzne zaťaženia a podmienky, vrátane lineárnych a nelineárnych analýz.
- **Metóda konečných prvkov (FEM):** Softvér využíva metódu konečných prvkov na diskretizáciu geometrie a riešenie komplexných problémov. ANSYS Mechanical poskytuje nástroje na generovanie a optimalizáciu mriežky (mesh), ktorá je kľúčová pre presnosť simulácie.
- **Multifyzikálne simulácie:** Softvér umožňuje kombináciu štruktúrnych analýz s prúdením, tepelnými a elektromagnetickými efektmi, čo umožňuje komplexnú analýzu a optimalizáciu návrhov.
- **Optimalizácia a návrh:** Nástroj obsahuje funkcie pre optimalizáciu návrhu, vrátane parametrických analýz a citlivostných štúdií, čo umožňuje inžinierom získať efektívne a ekonomicky výhodné návrhy.
- **Pracovné prostredie a integrácia:** Softvér poskytuje intuitívne a užívateľsky prívetivé rozhranie. Je tiež integrovaný s ďalšími produktmi ANSYS, čo umožňuje jednoduché prepojenie so softvérmi na simuláciu prúdenia (napr. ANSYS Fluent) a inými nástrojmi v rámci ANSYS Workbench.

Typické aplikácie ANSYS Mechanical:

- **Automobilový priemysel:** Simulácia napätia a deformácií v konštrukčných prvkoch automobilov, ako sú rámy, podvozky a komponenty motora.
- **Letecký priemysel:** Analýza štruktúrnych a aerodynamických účinkov na letecké konštrukcie a komponenty.
- **Stavebníctvo:** Vyhodnocovanie pevnosti a stability budov, mostov a iných inžinierskych stavieb.

- **Energetika:** Analýza štrukturálnych komponentov v energetických zariadeniach, ako sú turbíny a kotly.
- **Spotrebná elektronika:** Simulácia mechanických a tepelných efektov na komponenty v elektronických zariadeniach.

ANSYS Mechanical je výnimočný nástroj pre inžinierov a návrhárov, ktorí potrebujú presné a spoľahlivé simulácie pre optimalizáciu a zabezpečenie kvality svojich výrobkov. S jeho pokročilými analýzami a možnosťami integrácie sa stáva neoceniteľným pomocníkom pri vývoji a inováciách v rôznych odvetviach priemyslu. Ukážka simulácie v ANSYS Mechanical je na Obr. 48.



Obr. 48 Ukážka simulácie v ANSYS Mechanical [17]

3.5.4 ANSYS Fluent

Je pokročilý softvérový nástroj pre simuláciu prúdenia tekutín (CFD – Computational Fluid Dynamics), ktorý umožňuje analyzovať širokú škálu fyzikálnych javov, vrátane prenosu tepla, chemických reakcií, aerodynamiky, prúdenia kvapalín, plynov a ďalších. Používa sa predovšetkým na simuláciu správania tekutín, ale dokáže integrovať aj interakcie medzi tekutinami a pevnými materiálmi (napr. pri analýze teplotných účinkov alebo tlakov na pevné konštrukcie).

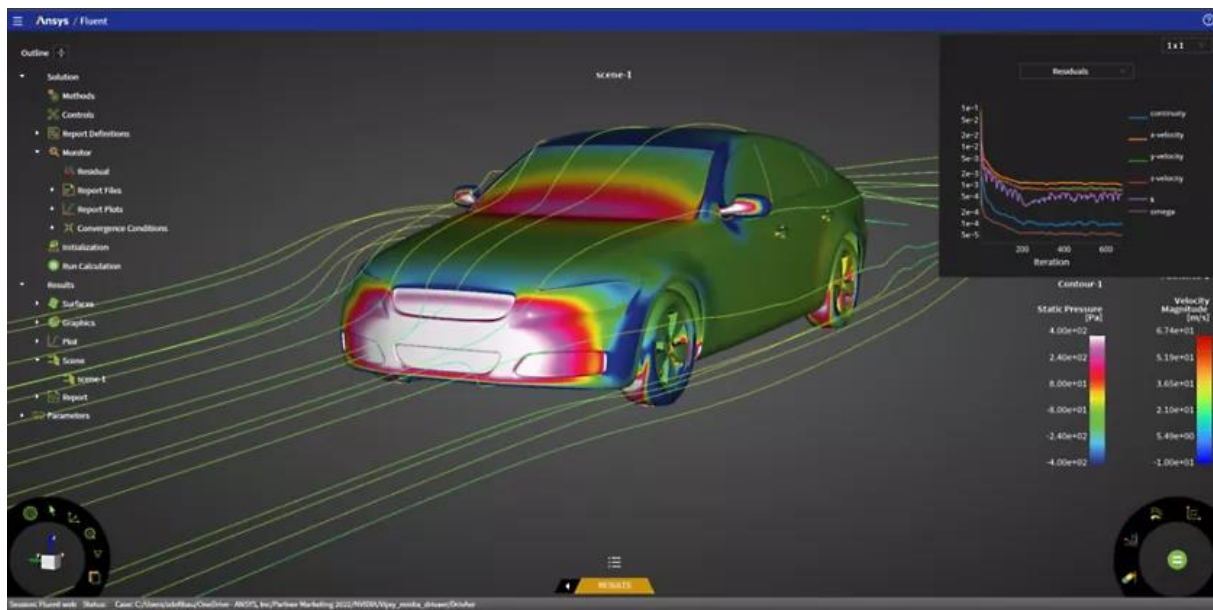
Kľúčové vlastnosti ANSYS Fluent:

- **Modelovanie prúdenia tekutín a tepla:** Fluent umožňuje simulovať turbulentné, laminárne a prechodné prúdenie. Zároveň podporuje modelovanie prenosu tepla, vrátane vedenia, prúdenia a sálania.
- **Multifyzikálne simulácie:** Dokáže simulovať viacfázové prúdenie (kvapalina-plyn, kvapalina-pevná látka, kvapalina-kvapka), prenos hmoty, chemické reakcie, správanie aerosólov, kavitáciu a mnoho ďalších fyzikálnych javov.
- **Turbulentné modely:** Fluent ponúka široký výber modelov turbulencie, ktoré umožňujú realistické simulácie prúdenia vzduchu okolo lietadiel, automobilov, veterných turbín alebo v potrubných systémoch.
- **Optimálny výpočet pomocou paralelného spracovania:** Softvér podporuje paralelizáciu výpočtov, čo zlepšuje výkonnosť a umožňuje simulácie zložitejších úloh v kratšom čase.
- **Prepojenie so štruktúrnymi analýzami:** Fluent je schopný pracovať v spojení s ďalšími produktmi ANSYS (ako je ANSYS Mechanical), čo umožňuje integrované multifyzikálne simulácie, napríklad simulácie interakcie tekutín a pevných látok (FSI – Fluid-Structure Interaction).

Typické aplikácie ANSYS Fluent:

- **Automobilový priemysel:** Analýza aerodynamiky, chladenia motorov, prenosu tepla v brzdách a výfukových systémoch.
- **Letecký a kozmický priemysel:** Modelovanie prúdenia vzduchu okolo lietadiel, turbín a raketových motorov.
- **Energetika:** Simulácie prúdenia a tepelných procesov v tepelných výmenníkoch, turbínach a chladiacich systémoch.
- **Spotrebný priemysel:** Simulácie správania aerosólov, chladenia elektroniky a prenosu tepla.

ANSYS Fluent je považovaný za jeden z najvýkonnejších CFD nástrojov na trhu, čo ho robí ideálnym pre zložité inžinierske simulácie a návrhy produktov s optimalizáciou prúdenia tekutín. Ukážka simulácie v ANSYS Mechanical Enterprise je na Obr. 49.



Obr. 49 Ukážka simulácie v ANSYS Fluent [18]

3.5.5 Ansys LS-DYNA

Je pokročilý softvér na analýzu konečných prvkov (FEM), ktorý sa špecializuje na simuláciu nelineárnych dynamických procesov. Vyvinutý spoločnosťou LSTC (Livermore Software Technology Corporation), LS-DYNA [19] sa široko využíva v automobilovom, leteckom, stavebnom a iných priemyselných odvetviach, kde je potrebné analyzovať zložené mechanické interakcie a správanie materiálov pri extrémnych zaťaženiach.

Kľúčové vlastnosti Ansys LS-DYNA:

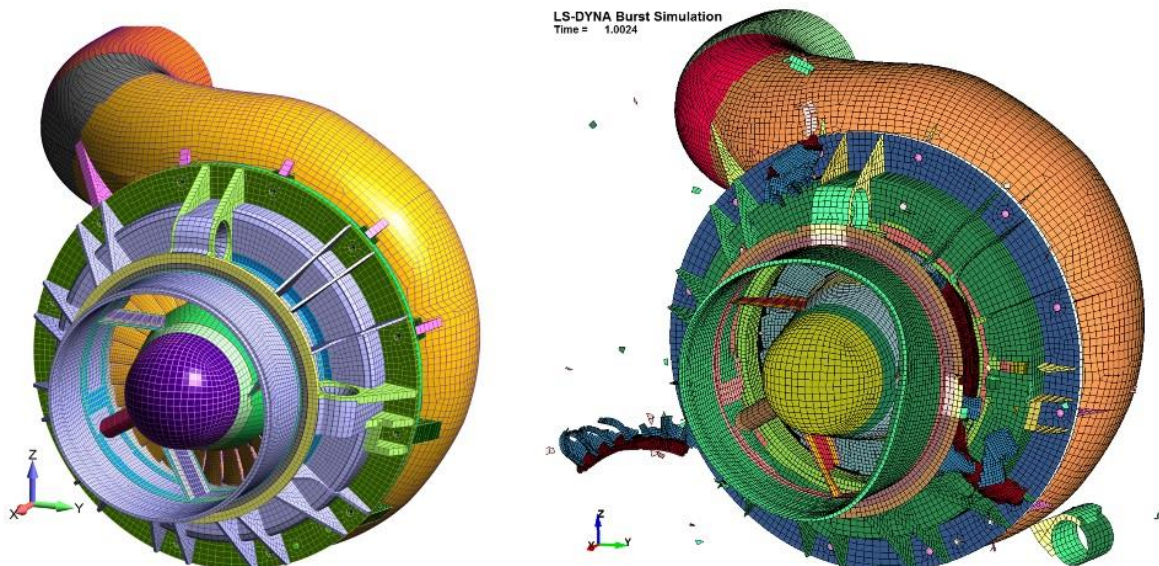
- **Nelineárna dynamika:** Softvér je navrhnutý na simuláciu nelineárnych dynamických procesov, čo zahŕňa rýchle deformácie a interakcie, ako sú nárazy, explózie a kolízie. Je obzvlášť cenný pri analýze havarijných situácií.
- **Flexibilita modelovania:** Softvér podporuje širokú škálu modelov a materiálov, vrátane elastických, plastických a viskoelastických materiálov. Softvér umožňuje modelovanie komplexných geometrických tvarov a interakcií medzi pevnými a tekutými materiálmi.
- **Multifyzikálne simulácie:** Okrem nelineárnej dynamiky softvér podporuje aj simulácie spojené s prúdením tekutín, tepelnými procesmi a elektromagnetizmom, čo umožňuje komplexné multifyzikálne analýzy.
- **Rýchly a efektívny výpočet:** Softvér je optimalizovaný na výkon a efektivitu, čo umožňuje rýchle spracovanie veľkých modelov a komplexných analýz. Softvér podporuje paralelizáciu, čo zvyšuje rýchlosť simulácií.

- **Robustné užívateľské rozhranie a možnosti vizualizácie:** Softvér poskytuje intuitívne grafické užívateľské rozhranie (GUI) a množstvo nástrojov na vizualizáciu výsledkov, čo umožňuje analýzu a interpretáciu komplexných dát.

Typické aplikácie LS-DYNA:

- **Automobilový priemysel:** Simulácia nárazov a havarijných testov, analýza bezpečnosti vozidiel a optimalizácia konštrukčných komponentov pre zlepšenie výkonu pri kolíziách.
- **Letecký priemysel:** Analýza správania lietadiel a ich komponentov pri extrémnych podmienkach, ako sú nárazy a turbulencie.
- **Stavebníctvo:** Modelovanie správania budov a konštrukcií pri seizmických udalostiach, ako aj analýza stability a únosnosti.
- **Zdravotná technika:** Simulácia biomechanických interakcií, ako sú implantáty a chirurgické zariadenia, pri analýze ich správania v reálnych podmienkach.

Ansys LS-DYNA sa stal jedným z najvýznamnejších nástrojov pre inžinierov a výskumníkov, ktorí potrebujú presné a spoľahlivé simulácie na analýzu zložitých mechanických systémov. Jeho schopnosť riešiť nelineárne dynamické úlohy a integrácia s inými softvérovými nástrojmi robia z neho neoceniteľného partnera v procese návrhu a vývoja v rôznych priemyselných oblastiach. Ukážka simulácie v Ansys LS-DYNA je na Obr. 50.



Obr. 50 Ukážka simulácie v Ansys LS-DYNA [20]

3.5.6 FORGE

Je špecializovaný softvér na simuláciu procesov tvárnenia a kovania, ktorý umožňuje detailnú analýzu materiálových tokov pri spracovaní kovov za tepla alebo za studena. Vyvinutý spoločnosťou Transvalor [21]. FORGE sa široko využíva v kovospracujúcom a automobilovom priemysle, kde je potrebné presne simulovať správanie materiálov pri deformácii, zahrievaní, chladení a tvárnení.

Kľúčové vlastnosti FORGE:

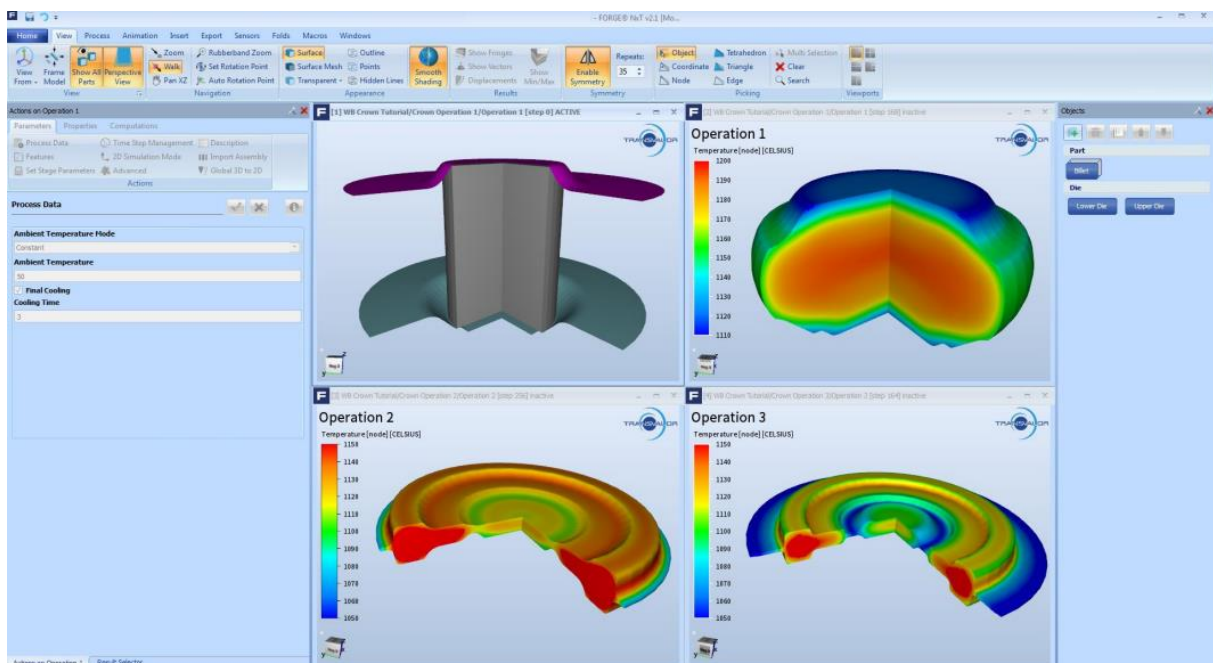
- **Simulácia kovania a tvárnenia:** Softvér je navrhnutý špeciálne pre simuláciu kovacích procesov, ako je zápusťkové kovanie, valcovanie, razenie a ťahanie. Dokáže analyzovať materiálové toky pri vysokých teplotách a tlakoch.
- **Modelovanie nelineárneho správania materiálov:** Softvér umožňuje simuláciu nelineárnych materiálových vlastností, ako sú plastická deformácia, prenos tepla, trenie a štrukturálne zmeny v kovocho počas tvárnenia.
- **Multifyzikálne simulácie:** Softvér dokáže integrovať viacero fyzikálnych javov, ako je prenos tepla, mechanická deformácia a trenie medzi nástrojmi a materiálom. Tento komplexný prístup zaručuje realistické simulácie kovových procesov.
- **Presnosť a optimalizácia výrobných procesov:** Softvér poskytuje nástroje na optimalizáciu výrobných procesov tým, že umožňuje simulovať rôzne scenáre spracovania kovov a identifikovať potenciálne problémy, ako sú praskliny, defekty alebo nehomogénne rozloženie materiálu.
- **Rýchle výpočty a efektívne riešenia:** Softvér podporuje paralelné spracovanie, čo zvyšuje rýchlosť simulácií aj pre komplexné kovací procesy. Je optimalizovaný na prácu s veľkými modelmi a procesmi s vysokým stupňom nelinearity.
- **Intuitívne rozhranie:** Softvér ponúka užívateľsky prívetivé grafické rozhranie, ktoré umožňuje jednoduchú tvorbu a úpravu modelov, ako aj prehľadnú vizualizáciu výsledkov simulácií.

Typické aplikácie FORGE:

- **Kovanie:** Simulácia procesu kovania, vrátane zápusťkového kovania, valcovania a razenia, s cieľom optimalizovať materiálové toky a minimalizovať defekty.
- **Automobilový priemysel:** Analýza procesov výroby automobilových komponentov, ako sú kľukové hriadele, nápravy a ďalšie kovové časti, pri vysokej záťaži a teplote.

- **Letecký priemysel:** Simulácia kovacích procesov pre letecké komponenty, ktoré vyžadujú vysokú presnosť a odolnosť materiálov.
- **Tepelné spracovanie:** Analýza prenosu tepla a štrukturálnych zmien v kovoch počas spracovania za tepla alebo za studena.

FORGE je nevyhnutným nástrojom pre inžinierov a výrobcov v kovspracujúcom priemysle, ktorí potrebujú optimalizovať procesy kovania a tvárnenia kovov. Jeho schopnosť simulovať komplexné materiálové interakcie a vysoká presnosť výpočtov robia z neho kľúčový nástroj pre zvýšenie efektivity a kvality výrobných procesov. Ukážka simulácie vo FORGE je na Obr. 51.



Obr. 51 Ukážka simulácie vo FORGE [22]

3.5.7 MSC Marc

Je to špičkový softvér na simuláciu konečných prvkov (FEM), ktorý sa zameriava na nelineárne analýzy v oblasti štrukturálnej mechaniky a materiálov. Vyvinutý spoločnosťou MSC Software [23]. MSC Marc je špeciálne navrhnutý na riešenie komplexných inžinierskych problémov, ktoré zahŕňajú nelineárne materiály, kontaktné interakcie a veľké deformácie. Využíva sa v rôznych priemyselných odvetviach vrátane automobilového, leteckého, energetického a výroby strojov.

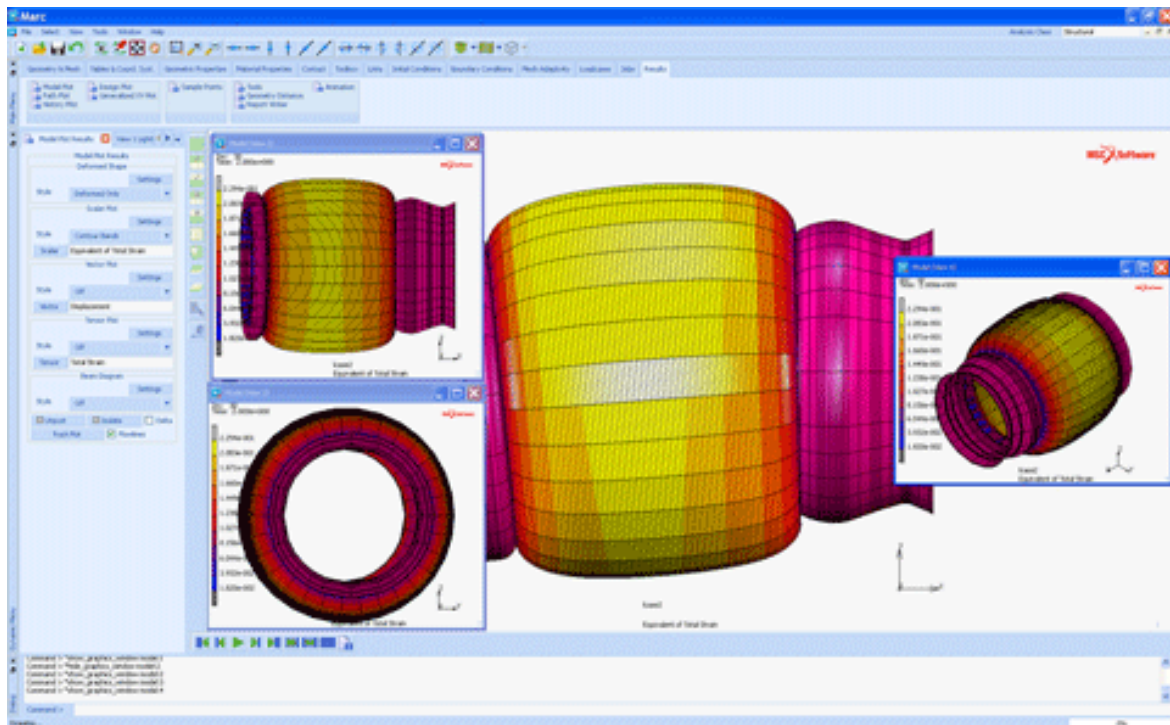
Kľúčové vlastnosti MSC Marc:

- **Nelineárne analýzy:** Softvér je jedným z najlepších softvérov pre simulácie nelineárnych procesov, ako sú veľké deformácie, materiálové nelinearity (plasticnosť, hyperelasticita, creep) a komplikované kontaktné podmienky medzi telesami. Jeho nelineárne riešiče sú optimalizované pre presné a stabilné simulácie.
- **Multifyzikálne simulácie:** Okrem štrukturálnych analýz softvér podporuje aj multifyzikálne simulácie, ktoré zahŕňajú termálne a elektromagnetické problémy. Tieto simulácie sú dôležité pre analýzu komponentov a systémov, ktoré sú vystavené viacerým typom zaťaženia súčasne.
- **Kontaktné interakcie:** Softvér poskytuje robustné nástroje na modelovanie kontaktov medzi rôznymi telesami, vrátane kontaktov s trením, adhezívnych kontaktov a iných komplikovaných kontaktných mechanizmov. To je kľúčové pri simuláciách, kde dochádza k interakciám medzi rôznymi časťami systému.
- **Flexibilné modelovanie materiálov:** Softvér umožňuje presné modelovanie rôznych materiálov, ako sú kovy, polyméry, kompozity, elastoméry a biomateriály. Softvér podporuje aj pokročilé materiálové modely, ako je hyperelasticita, viskoelasticita, a tečenie.
- **Prispôbitel'né a modulárne rozhranie:** Užívatelia majú možnosť prispôbiť simulácie svojim potrebám pomocou skriptovania a automatizácie. Softvér je veľmi flexibilný v integrácii s inými softvérmi a umožňuje export a import dát z ďalších CAE nástrojov.
- **Únavová a tepelná analýza:** Softvér ponúka nástroje na únavové analýzy, ktoré sú dôležité pre predpovedanie životnosti komponentov. Tepelná analýza zahŕňa simulácie prenosu tepla, teplotného namáhania a zmeny materiálových vlastností v dôsledku teplotných zmien.

Typické aplikácie MSC Marc:

- **Automobilový priemysel:** Simulácie nárazov, deformačných zón, interakcií komponentov a materiálového správania pri dynamických zaťaženiach.
- **Letecký priemysel:** Analýza štrukturálnych komponentov lietadiel vystavených veľkým deformáciám, vysokým teplotám a tlakom.
- **Energetika:** Modelovanie komponentov v energetických zariadeniach, ako sú turbíny, tlakové nádoby a potrubia, ktoré sú vystavené rôznym mechanickým a tepelným zaťaženiam.
- **Biomedicínske aplikácie:** Simulácie interakcií implantátov s biologickými tkanivami, ako aj modelovanie správania materiálov pri extrémnych podmienkach.

MSC Marc je vysoko všestranný a výkonný nástroj, ideálny pre riešenie zložitých nelineárnych problémov. Jeho schopnosť zvládnuť veľké deformácie, zložité kontaktné problémy a multifyzikálne interakcie robí z neho dôležitý softvér pre vývoj a optimalizáciu produktov v rôznych inžinierskych odvetviach. Ukážka simulácie v MSC Marc je na Obr. 52.



Obr. 52 Ukážka simulácie v MSC Marc [24]

3.5.8 MSC Nastran

Je program pre analýzu konečných prvkov (FEA), ktorý bol pôvodne vyvinutý pre NASA koncom 60-tych rokov pre letecký priemysel. MSC Nastran [25] je výkonný softvérový nástroj na analýzu konečných prvkov (FEM), ktorý je určený na riešenie širokého spektra inžinierskych problémov, najmä v oblasti štruktúrálnej analýzy. Vyvinutý pôvodne pre NASA, dnes sa používa v rôznych priemyselných odvetviach, ako sú letecký a automobilový priemysel, stavebníctvo, energetika a ďalšie. MSC Nastran sa špecializuje na lineárne aj nelineárne štruktúrálne analýzy a je považovaný za jeden z najspoľahlivejších nástrojov pre simuláciu zložitých inžinierskych systémov.

Kľúčové vlastnosti MSC Nastran:

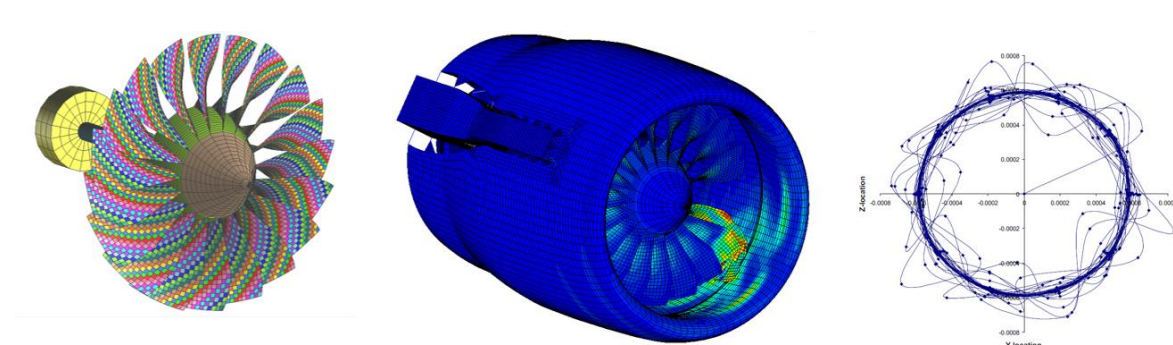
- **Štrukturálna analýza:** Softvér je navrhnutý na riešenie lineárnych a nelineárnych statických a dynamických problémov. Podporuje analýzy statického zaťaženia, modálnej analýzy, harmonických odoziev, únavových analýz a analýzy stability.
- **Metóda konečných prvkov (FEM):** Softvér využíva FEM na riešenie problémov mechaniky pevných telies, prenosu tepla a ďalších fyzikálnych javov. Je optimalizovaný na efektívne riešenie veľkých a komplexných modelov, ktoré zahŕňajú milióny stupňov voľnosti.
- **Nelineárne analýzy:** Nastran poskytuje nástroje pre riešenie nelineárnych problémov, ako sú veľké deformácie, nelineárne materiály a zložité kontaktné podmienky. Toto umožňuje simulovať reálne správanie štruktúr pri extrémnych zaťaženiach a podmienkach.
- **Dynamické analýzy:** Softvér je výkonný v oblasti dynamických simulácií, čo zahŕňa simulácie nárazov, vibrácií, seizmických zaťažení a ďalších dynamických zaťažení. Modálna analýza, harmonická analýza a spektrálne analýzy sú bežné aplikácie.
- **Multifyzikálne simulácie:** Hoci je primárne zameraný na štruktúrnu analýzu, Nastran umožňuje aj multifyzikálne simulácie, ktoré zahŕňajú prenos tepla, akustické simulácie a elektromagnetické efekty, čím zaisťuje, že fyzikálne interakcie sú presne modelované.
- **Optimalizácia návrhov:** MSC Nastran poskytuje pokročilé nástroje na optimalizáciu návrhu, ktoré pomáhajú inžinierom zlepšiť výkonnosť a efektivitu ich návrhov. Umožňuje optimalizovať štruktúrne vlastnosti, hmotnosť, pevnosť a ďalšie parametre.
- **Integrácia a interoperabilita:** Nastran je plne kompatibilný s inými softvérmi na simuláciu a návrh, čo umožňuje jednoduché prepojenie s CAD a CAE nástrojmi. Jeho súbory môžu byť importované a exportované do rôznych formátov, čo uľahčuje prácu v interdisciplinárnych tímoch.

Typické aplikácie MSC Nastran:

- **Letecký priemysel:** Štrukturálna analýza lietadiel a vesmírnych lodí, vrátane simulácie namáhania, vibrácií a odolnosti proti nárazom.
- **Automobilový priemysel:** Analýza karosérií a rámov vozidiel, optimalizácia štruktúrnych komponentov na zníženie hmotnosti a zvýšenie bezpečnosti.
- **Stavebníctvo:** Simulácie seizmických zaťažení na budovách, mostoch a iných veľkých stavbách.

- **Energetika:** Analýza komponentov elektrární, tlakových nádob a potrubí, ktoré sú vystavené vysokým teplotám a tlakom.
- **Zdravotná technika:** Modelovanie biomechanických systémov a simulácia interakcií medzi implantátmi a ľudským telom.

MSC Nastran je vysoko uznávaný v inžinierskom svete pre svoju spoľahlivosť, presnosť a schopnosť riešiť najnáročnejšie štrukturálne problémy. Jeho schopnosť simulovať rôzne typy zaťaženií a interakcií medzi fyzikálnymi systémami ho robí neoceniteľným nástrojom pre vývoj produktov v mnohých priemyselných odvetviach. Ukážka simulácie v NASTRAN je na Obr. 53.



Obr. 53 Ukážka simulácie v MSC Nastran [26]

3.5.9 PAM-Crash

Je softvér na simuláciu konečných prvkov (FEM) špecializovaný na dynamické analýzy nárazov, kolízií a crash testov. Vyvinutý spoločnosťou ESI Group [27]. PAM-Crash sa široko využíva najmä v automobilovom priemysle na simulácie crash testov vozidiel, ale tiež nachádza uplatnenie v leteckom, železničnom a vojenskom priemysle. Je určený na simuláciu zložitých fyzikálnych interakcií a nelineárnych dynamických udalostí, vrátane deformácií a zlyhania materiálov pri extrémnych zaťaženiach.

Kľúčové vlastnosti PAM-Crash:

- **Simulácie nárazov a crash testov:** PAM-Crash je špecializovaný na simuláciu kolízií vozidiel a testov bezpečnosti pri náraze. Umožňuje presné modelovanie správania štruktúr vozidiel a komponentov pri nárazoch a analyzuje, ako sa deformujú a absorbujú energiu počas kolízie.

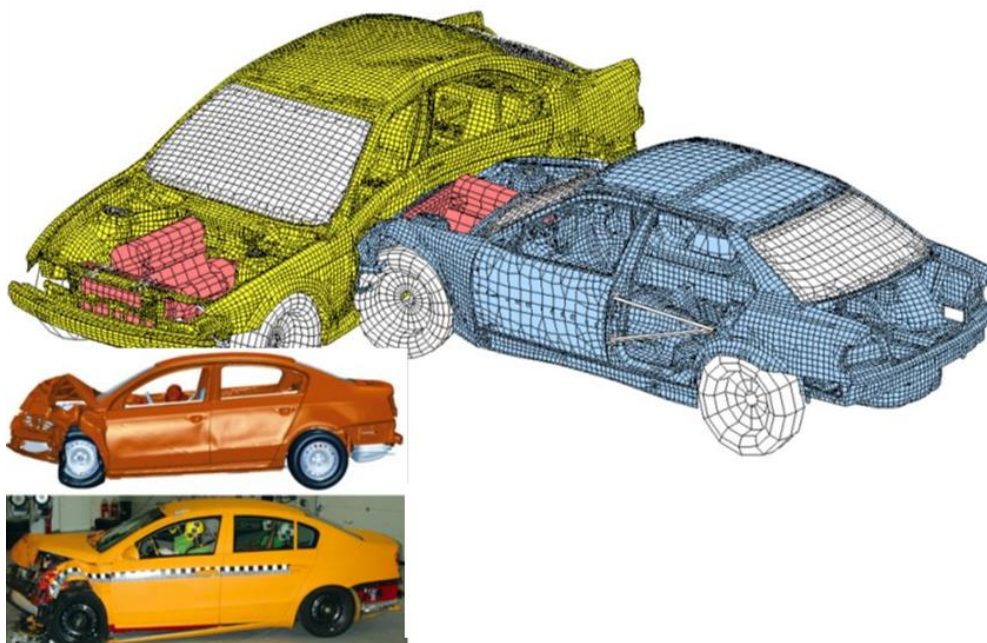
- **Nelineárne materiálové modely:** Softvér podporuje nelineárne materiálové modely, ktoré sú kľúčové pre presné simulácie plastickej deformácie, zlyhania materiálu, zlomenín a iných kritických reakcií pri extrémnych podmienkach.
- **Dynamické simulácie:** PAM-Crash umožňuje simuláciu vysoko dynamických udalostí, ktoré zahŕňajú veľké deformácie, zložité kontaktné podmienky a nelineárne správanie materiálov. Tieto simulácie pomáhajú predpovedať správanie komponentov v reálnych havarijných situáciách.
- **Bezpečnostné systémy vozidiel:** Softvér sa používa aj na simuláciu správania bezpečnostných systémov, ako sú airbagy, bezpečnostné pásy a iné pasívne ochranné prvky, ktoré chránia cestujúcich počas nárazu.
- **Optimalizácia návrhov:** PAM-Crash poskytuje nástroje na optimalizáciu štruktúrnych komponentov vozidiel a ďalších výrobkov z hľadiska bezpečnosti a odolnosti pri nárazoch. Umožňuje inžinierom zlepšiť bezpečnosť a výkon vozidiel ešte pred fyzickým testovaním.
- **Integrácia s CAD a CAE systémami:** Softvér podporuje prepojenie s ďalšími inžinierskymi nástrojmi, čo umožňuje ľahkú integráciu do pracovných postupov návrhu a simulácie.
- **Rýchlosť a efektívnosť výpočtov:** PAM-Crash je optimalizovaný na efektívne spracovanie veľkých modelov s komplexnými nelineárnymi interakciami, čo umožňuje rýchle simulácie aj pri zložitých scenároch.

Typické aplikácie PAM-Crash:

- **Automobilový priemysel:** Simulácia crash testov pre overovanie bezpečnosti vozidiel, analýza deformácií štruktúr pri čelných, bočných a zadných nárazoch, ako aj testovanie bezpečnostných systémov, ako sú airbagy.
- **Letecký priemysel:** Simulácia nárazov a analýza zlyhania komponentov lietadiel počas havárií.
- **Železničný priemysel:** Simulácie nárazov vlakov, prevrátenia vozňov a bezpečnostných opatrení pri zrážkach.
- **Obranný priemysel:** Simulácie explózií, balistických nárazov a iných vojenských aplikácií, kde sú komponenty vystavené extrémnym podmienkam.

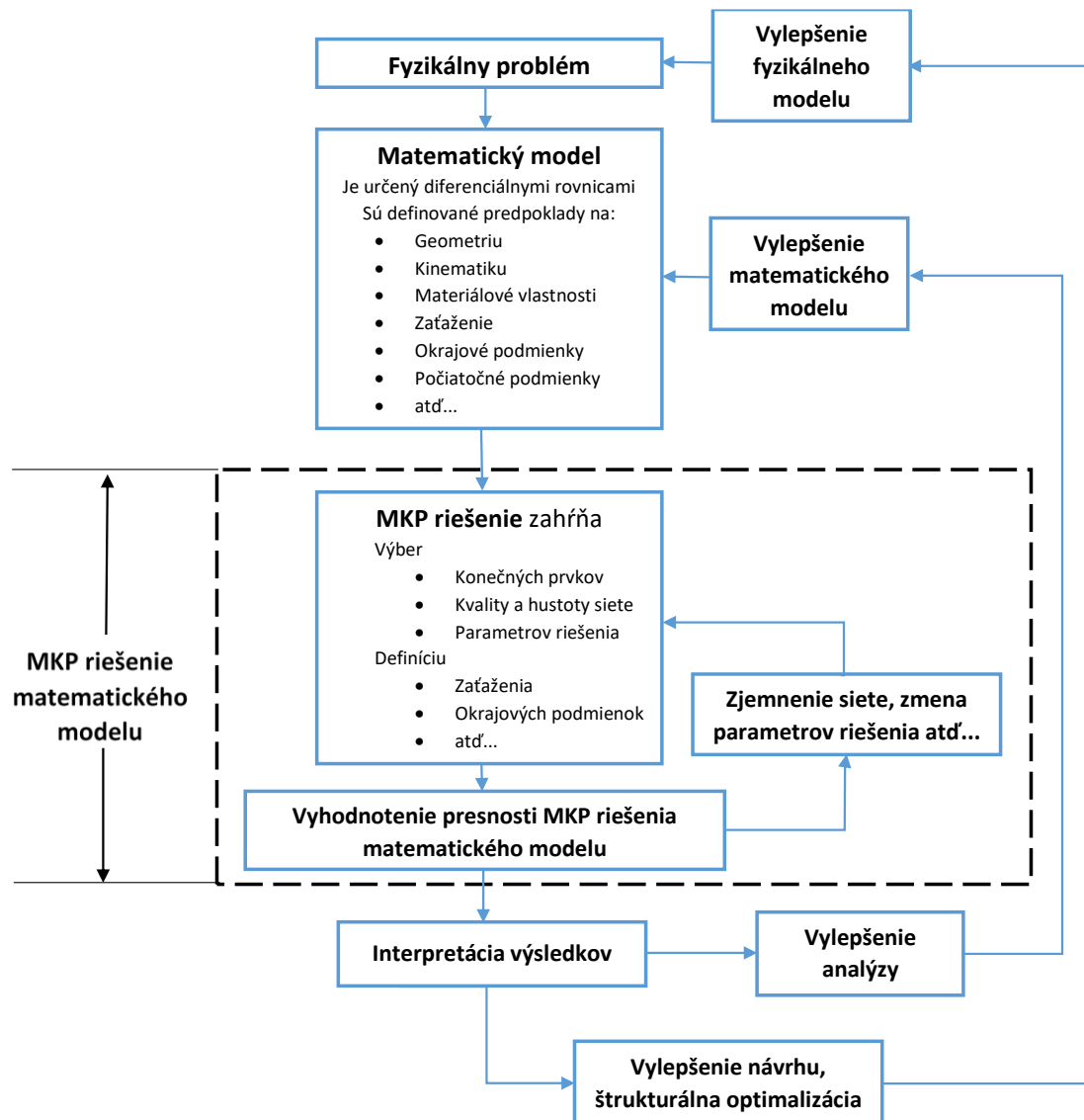
PAM-Crash je mimoriadne hodnotným nástrojom pre inžinierov, ktorí potrebujú predpovedať správanie mechanických systémov pri vysoko dynamických a nelineárnych

udalostiach. Jeho špecializácia na crash testy a nárazové simulácie robí z neho neoceniteľný softvér v oblasti bezpečnosti a vývoja vozidiel a ďalších produktov, ktoré musia odolávať extrémnym podmienkam. Ukážka simulácie v PAM-Crash je na Obr. 54.



Obr. 54 Ukážka simulácie v PAM-Crash [28]

4 Analýza konečných prvkov (FEA)



Obr. 55 Proces FEA

Praktická aplikácia FEM je známa ako FEA. FEA aplikovaná v inžinierstve je výpočtovým nástrojom na vykonávanie inžinierskych analýz. Zahŕňa použitie techník sieťovej generácie na rozdelenie zložitého problému na malé prvky ako aj použitie softvérového programu kódovaného algoritmom FEM. Pri použití FEA je zložitým problémom zvyčajne fyzikálny systém s fyzikálnou základňou, ako je Euler-Bernoulliho rovnica, tepelná rovnica alebo Navier-Stokesove rovnice vyjadrené buď parciálnymi diferenciálnymi rovnicami alebo v integrálnymi rovnicami, zatiaľ čo menšie oddelené časti zložitého problému predstavujú rôzne oblasti fyzikálneho systému. FEA je dobrou voľbou pre analýzu problémov na zložitých zariadeniach (ako sú automobily a ropovody). Simulácie FEA poskytujú cenný zdroj, pretože

odstraňujú viaceré prípady vytvárania a testovania reálnych prototypov pri rôznych situáciách s vysokou presnosťou. Napríklad pri simulácii čelného nárazu je možné zvýšiť presnosť predikcie v dôležitých prvkoch ako je predná časť vozidla a znížiť ju v zadnej časti (čím sa znížia náklady na simuláciu). Ďalším príkladom by mohla byť numerická predpoveď počasia, kde je dôležitejšie mať presné predpovede nad vývojom vysoko nelineárnych javov (ako sú tropické cyklóny v atmosfére alebo víry v oceáne) namiesto relatívne pokojných oblastí.

5 Statické analýzy

Pri statických analýzach nie sú uvažované dynamické efekty, napríklad sily zotrvačnosti a tlmenie.

- Dôležité je overenie statického predpokladu, pretože dynamické zaťaženie môže vytvoriť až dvojnásobok napätia, ktoré vznikne pri statickom zaťažení s rovnakou veľkosťou, kde x je pomer viskózneho tlmenia. Pre ľahko tlmené štruktúry s 5% tlmením budú dynamické napätia až 10 krát väčšie ako statické napätia. Najhoršia situácia nastáva pri rezonancii .
- Pomocou statickej analýzy možno spočítať štrukturálnu odozvu telies rotujúcich konštantnými rýchlosťami alebo pohybujúcich sa s konštantným zrýchlením, pretože vzniknuté zaťaženia sa nemenia s časom [29].

Statické analýzy môžu byť:

- lineárne,
- nelineárne.

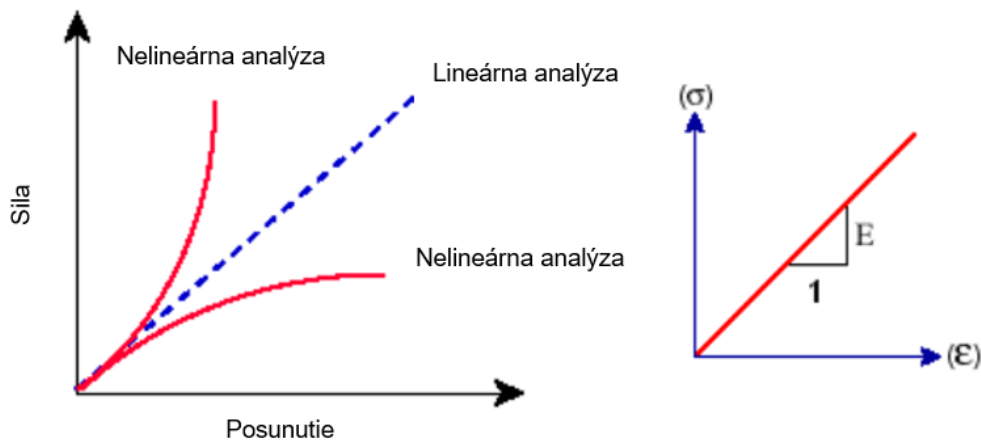
5.1 Lineárna statická analýza

Pri aplikovaní zaťaženia na teleso sa teleso zdeformuje a vplyv zaťaženia sa prenáša cez celé teleso. Vonkajšie zaťaženie spôsobí to, že vnútorné sily a reakcie uvedú teleso do stavu rovnováhy. Lineárna statická analýza spočíta posuny, namáhania, napätia a reakčné sily pod vplyvom aplikovaného zaťaženia.

Lineárna analýza je založená na predpokladoch *statiky a linearity*, a preto je platná len vtedy, ak sú tieto predpoklady splnené. Ak nebude aspoň jeden predpoklad splnený, lineárna analýza vyprodukuje nesprávne výsledky a bude potrebné použiť k modelovaniu nelineárnu analýzu.

5.1.1 Statický predpoklad

Všetky zaťaženia sa aplikujú pomaly a postupne, až kým nedosiahnu svoju plnú veľkosť. Po ich dosiahnutí zostávajú konštantné (časovo nemenné). Tento predpoklad umožňuje zanedbať sily zotrvačnosti a tlmenie, pretože ide o zanedbateľne malé zrýchlenia a rýchlosti. Časovo premenné zaťaženie spôsobuje značné sily zotrvačnosti a tlmenie, ktoré opodstatňujú použitie dynamickej analýzy. Dynamické zaťaženie sa mení s časom a v mnohých prípadoch spôsobuje významné sily zotrvačnosti a tlmenie, ktoré nie je možné zanedbať [8].



Obr. 56 Nelineárna a lineárna analýza – Hookov zákon [9]

5.1.2 Predpoklad linearity

Vzťah medzi zaťažzeniami a spôsobenými odozvami je lineárny. Ak sa napríklad zdvojnásobí zaťaženie, zdvojnásobí sa aj odozva modelu (posuny, namáhanie a napätie). Predpoklad lineárnosti je možné zadať v prípade, že:

- všetky materiály v modeli spĺňajú Hookov zákon, takže napätie je priamo úmerné pomernej deformácii,
- spôsobené posunutia sú dostatočne malé na to, aby bolo možné zanedbať zmenu tuhosti spôsobenú zaťažením,
- okrajové podmienky sa počas pôsobenia zaťaženia nemenia. Zaťaženie musí mať konštantnú veľkosť, smer a rozloženie aj pri deformácii telesa.

Základné predpoklady použitia lineárnej statickej analýzy možno zhrnúť do 4 bodov:

- malé deformácie,
- malé (nekonečne malé) pretvorenia (pomerné deformácie),
- elastické správanie sa materiálu,
- statické zaťaženie (zaťažujúce sily sa nemenia v čase).

5.2 Nelineárna statická analýza

Nelineárna statická analýza musí byť použitá vždy, keď je v modeli zaznamenaný nelineárny vzťah medzi napätím a namáhaním pri určitom zaťažení. Pri určitej hodnote zaťaženia sa všetky reálne objekty správajú nelineárne. Nelinearita môže byť spôsobená správaním materiálu, veľkými posuvmi a podmienkami kontaktu [29].

V nelineárnej statickej analýze nie sú uvažované dynamické efekty, napríklad sily zotrvačnosti a tlmenie.

- Niektoré materiály spĺňajú Hookov zákon (napätie je priamo úmerné deformácii) iba pri veľmi malej deformácii, pri narastajúcej deformácii sa vzťah napätie – deformácia mení nelineárne. Iné materiály sa správajú nelineárne aj pri malej deformácii. Model materiálu predstavuje matematickú simuláciu správania materiálu. Nelineárna analýza ponúka mnoho typov modelov materiálu.
- Spôsobené posunutia sú dostatočne malé na to, aby bolo možné ignorovať zmenu tuhosti spôsobenú zaťažením. Nelineárna analýza ponúka možnosť veľkej deformácie, pri definovaní vlastností materiálu objemovej súčiastky alebo škrupiny. Maticu tuhosti možno vypočítať znovu v každom kroku riešenia. Užívateľ riadi počet prepočtov matice tuhosti.
- Okrajové podmienky sa počas pôsobenia zaťaženia nemenia. Zaťaženie musí mať konštantnú veľkosť, smer a rozloženie. Kontaktné problémy sú napríklad prirodzene nelineárne, pretože sa limitné podmienky menia, keď dôjde ku kontaktu pri zaťažení. Lineárna analýza ponúka približné riešenie pre kontaktné problémy, v ktorých sa zvažuje vplyv veľkej deformácie.

Pre nelineárne **statickú** analýzu je čas pseudopremennou. Popisuje, pri ktorých úrovniach zaťaženia je riešenie hľadané. Čas má skutočné hodnoty len pre viskoelastické materiály alebo modely materiálov tečenia.

Pre nelineárnu **dynamickú** analýzu je čas reálnou hodnotou.

5.2.1 Druhy nelinearity

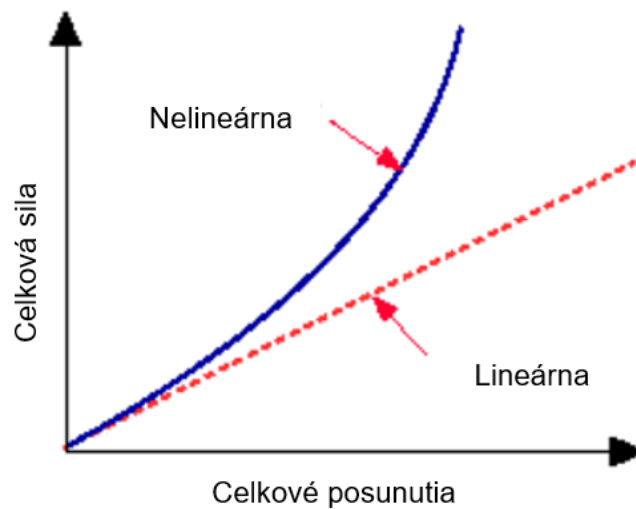
Väčšina fyzických javov v reálnom svete vykazujú nelineárne správanie. V mnohých situáciách sa dosahujú uspokojivé výsledky za predpokladu lineárneho správania fyzického systému. Existujú však okolnosti alebo javy, ktoré vyžadujú nelineárne riešenie. To môže vzniknúť z dôvodu geometrických a materiálových nelinearít, ako aj zmenou okrajových podmienok a integrity štruktúry.

5.2.1.1 Geometrická nelinearita

Je spôsobená geometrickými vzťahmi v matematickom vyjadrení charakteristiky [1].

Veľké vychýlenie a natočenie: ak sa štruktúra podrobí veľkým posunom v porovnaní s jeho najmenším rozmerom a natočeniu v rozsahu jeho pôvodných rozmerov a polohy ako aj smeru zaťaženia (rybárska tyč s nízkou bočnou tuhosťou pri bočnom zaťažení – veľké deformácie a natočenie).

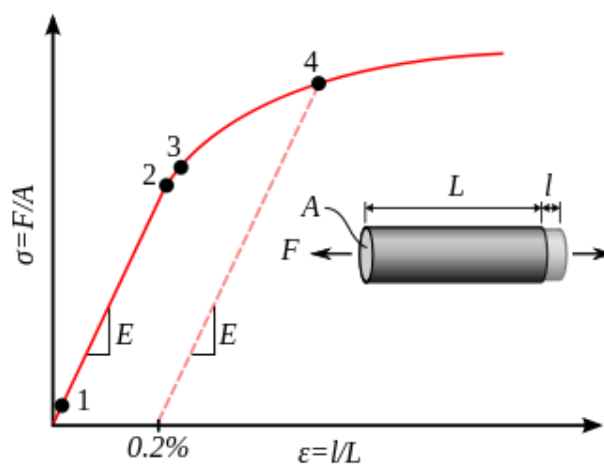
Napät'ové spevnenie: ak napätie v jednom smere ovplyvňuje tuhosť v inom smere (káble, membrány alebo rotujúce štruktúry).



Obr. 57 Interpretácia geometrickej nelinearity [10]

5.2.1.2 Materiálová nelinearita

Je daná nelineárnym chovaním materiálu, ktorý sa pri zaťažení deformuje. Vzťah medzi deformáciou a zaťažením je nelineárny. Hookov zákon opisuje vzťah medzi deformáciou pevného telesa vyvolanou pôsobením napätia a veľkosťou tohto napätia. V oblasti po medzu úmernosti, t. j. pre malé napätia, je táto závislosť lineárna a deformácia je priamo úmerná napätiu materiálu.



Obr. 58 Hookov zákon – grafická interpretácia [1]

Hookov zákon vyjadrený pre materiál namáhaný jednoosovým ťahom alebo tlakom definuje vzťah (1):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1)$$

kde:

ε – pomerná deformácia materiálu = pomerné predĺženie [-],

σ – mechanické napätie v ťahu [MPa],

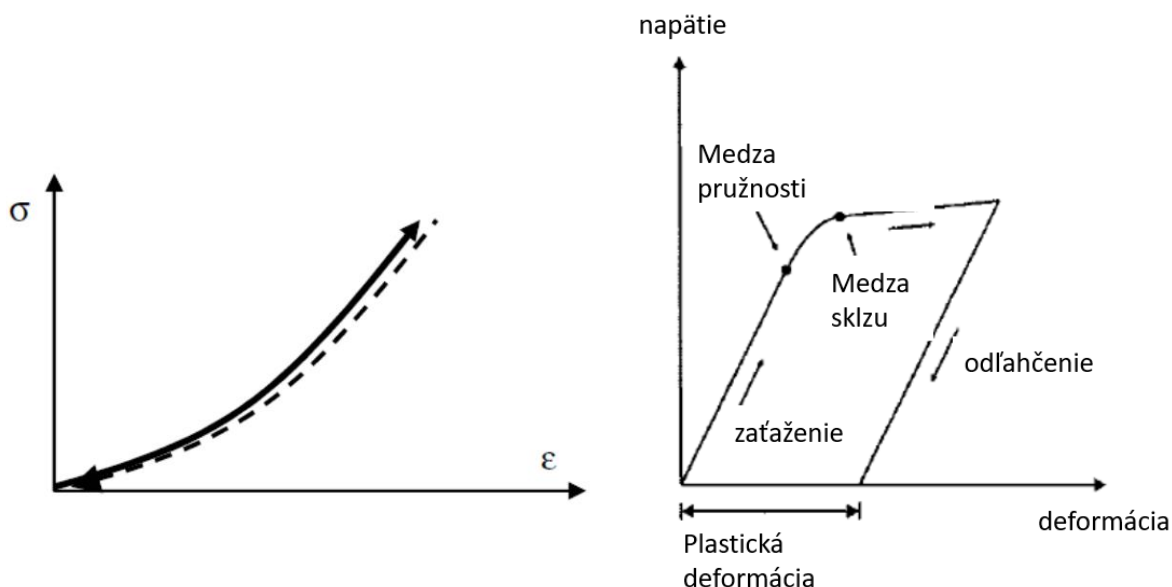
E – modul pružnosti v ťahu (Youngov modul) [MPa].

Oblasť platnosti Hookovho zákona na Obr. 58 je medzi bodmi 1 a 2. Ťahová skúška klasického kovového materiálu, napr. ocele, ukazuje jasne na lineárnu, elastickú oblasť pod medzou sklzu, kde platí Hookov zákon $\sigma = E \cdot \varepsilon$ a nasleduje nelineárna plastická oblasť.

Okrem toho možno rozlišovať ešte **elastické a plastické správanie materiálu**.

S **elastickým** správaním materiálu je spojená nelineárna elasticita – nelineárna krivka napätia a deformácie. Pri zaťažovaní je závislosť medzi zaťažením a deformáciou nelineárna, avšak pri odľahčení sa štruktúra vráti do svojho pôvodného stavu bez trvalých deformácií – materiál sa chová elasticky.

Plastické správanie materiálu znamená, že po jeho odľahčení časť deformácie v ňom zostáva.

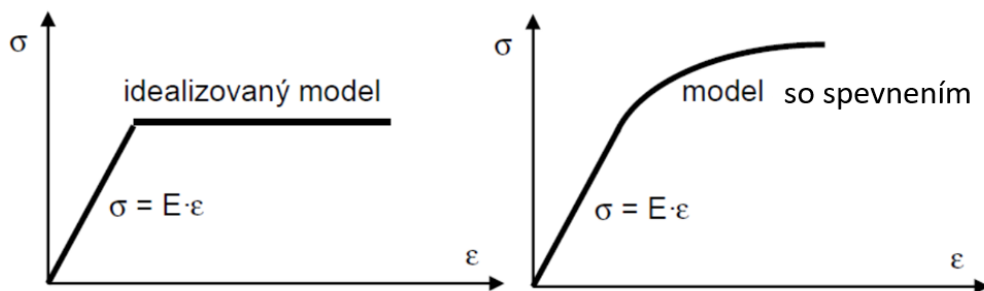


Obr. 59 Nelineárna elasticita a oblasť plastickej deformácie materiálu [10]

Plasticita je definovaná ako trvalá, časovo nezávislá deformácia. Po odľahčení zaťaženia zostáva trvalá (plastická) deformácia. V takýchto prípadoch plastickej deformácie materiálu sa

využíva tzv. **idealizovaný model plasticity** – po dosiahnutí istej hodnoty napätia (medze sklzu) dôjde k plastifikácii, čo sa prejaví tým, že deformácia narastá bez toho, aby došlo k nárastu napätia.

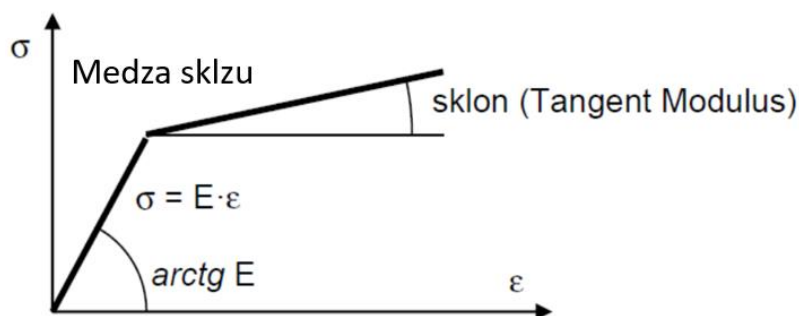
V skutočnosti však aj po prekročení medze sklzu dochádza k nárastu napätia, avšak pomalšie a nelineárne. Hovoríme o **deformačnom spevnení**. Najčastejšie je izotropné spevnenie (Isotropic Hardening) a kinematické spevnenie (Kinematic Hardening). Izotropné spevnenie je vhodné pre jednorázovo zaťažené objekty, kinematické spevnenie sa využíva pri zaťažení s odľahčením.



Obr. 60 Plastický materiálový model – idealizovaný a so spevnením [29]

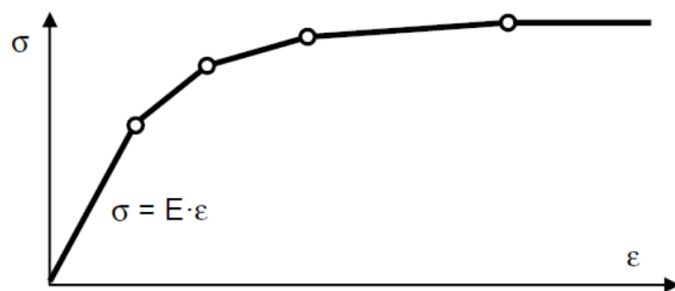
Plastické materiálové modely sa líšia definíciou zaťažovacej krivky:

- a) **Bilineárna definícia** plastického materiálového modelu je jednoduchšia. Krivka je nahradená jednou zalomenou priamkou (Obr. 61). Okrem modulu pružnosti E , definujúceho sklon priamky v elastickej (pružnej) oblasti, sa definuje ešte medza sklzu (Yield Strength) a sklon priamky nad medzou sklzu, tzv. „Tangent Modulus“.



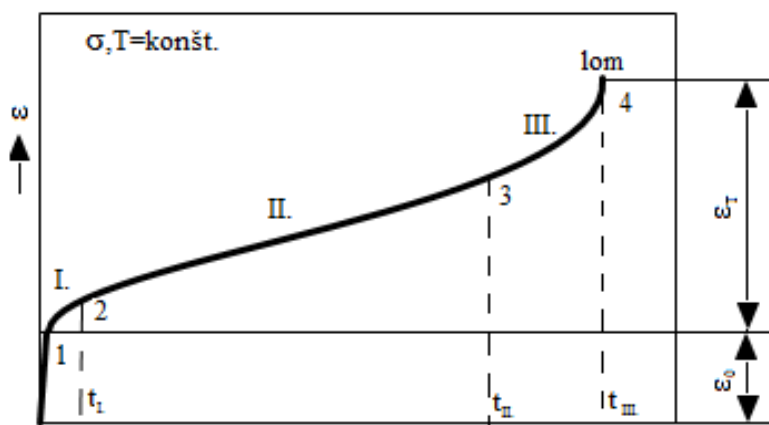
Obr. 61 Bilineárna definícia plastického materiálového modelu [9]

- b) **Multilineárna definícia** plastického materiálového modelu je dokonalejšia. Krivka je definovaná ako niekoľkokrát zalomená priamka (Obr. 62). Jednotlivé body zalomenej priamky sa zadávajú formou tabuľky.



Obr. 62 Multilineárna definícia plastického materiálového modelu [9]

Creep (tečenie materiálu) je trvalá, časovo závislá plastická deformácia materiálu pri konštantnom napätí. Je charakterizovaný pomalou plastickou deformáciou, ktorá prebieha aj pod medzou sklzu daného materiálu. Jav tečenia je dôležitý obzvlášť pri projektovaní súčiastok dlhodobo vystavených vysokým teplotám pri aplikovanom silovom zaťažení. Priebeh tečenia pri konštantnom napätí a teplote je znázornený na krivke tečenia (Obr. 63).



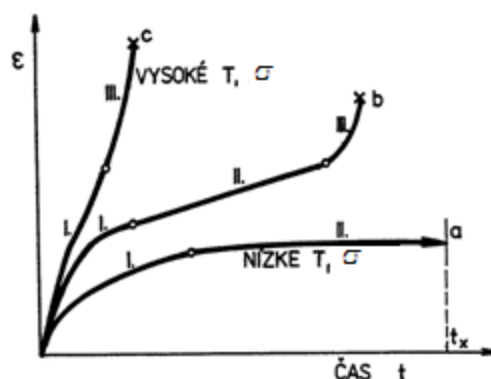
Obr. 63 Krivka tečenia [29]

I – primárne štádium tečenia nadväzuje na začiatočnú pružnú a trvalú deformáciu. Dochádza k postupnému poklesu rýchlosti deformácie a prejavuje sa vplyv deformačného spevnenia.

II – v sekundárnom štádiu dosahuje tečenie minimálnu rýchlosť – toto štádium je zvyčajne najdlhšie a trvá aj niekoľko rokov. Rýchlosť creepovej deformácie v tomto štádiu konštantná. Toto štádium je charakteristické plastickou deformáciou, pri ktorej sa spevňuje a súčasne zotavuje kovová látka. Sekundárne štádium je považované za najdôležitejšie, keďže práve v tomto štádiu je súčiastka vystavená prakticky počas celej svojej životnosti. Práve preto sa súčiastky dimenzujú (explicitne alebo implicitne) na základe rýchlosti deformácie v tomto štádiu.

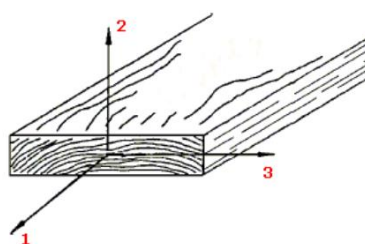
III – terciárne štádium tečenia je charakterizované exponenciálnym rastom rýchlosti a končí lomom. Začiatkom je vznik mikroskopických trhlín, kvôli redukcii nosného prierezu sa zvyšok súčiastky prakticky dolomí silovým lomom.

Trvanie jednotlivých štádií je pre daný materiál nepriamo úmerné teplote a napätiu. Krivky tečenia pre rôzne hodnoty napätia a teploty sú na Obr. 64.



Obr. 64 Krivky tečenia pre rôzne hodnoty napätia a teploty [10]

Materiál je **izotropný**, ak sú všetky jeho mechanické a teplotné vlastnosti vo všetkých smeroch rovnaké. Izotropné materiály majú homogénne alebo nehomogénne mikroskopické štruktúry. Izotropné materiály teda majú vo všetkých smeroch zhodný modul pružnosti, Poissonovu konštantu, súčiniteľ tepelnej rozťažnosti materiálu, tepelnú vodivosť atď. Termín izotermický sa občas používa pre označenie materiálov bez preferovaných smerov pre koeficienty tepelnej rozťažnosti. Oceľ napríklad vykazuje izotropné vlastnosti, hoci je jej mikroskopická štruktúra nehomogénna. Materiál je **ortotropný**, ak sú jeho mechanické a teplotné vlastnosti jedinečné a nezávislé v troch vzájomne kolmých smeroch. Príkladom ortotropného materiálu je drevo, veľa druhov kryštálov a valcované plechy. Mechanické vlastnosti dreva sa dajú napríklad vyjadriť v pozdĺžnom, radiálnom a tangenciálnom smere. Pozdĺžna os (1) je rovnobežná so smerom vlákien; radiálne os (2) je kolmá na letokruhy a os (3) je voči letokruhom dotyčnicou.



Obr. 65 Príklad ortotropného materiálu (drevo) [29]

Viskoelasticita je časovo závislá deformácia pri konštantnom zaťažení. Po odľahčení zaťaženia sa materiál vráti do pôvodného stavu.

Hyperelasticita je vzťah medzi napätím a deformáciou definovaný ako nelineárne elastický, izotropný, nestlačiteľný a všeobecne nezávislý od rýchlosti deformácie (materiály podobné gume).

6 Dynamické analýzy

Na rozdiel od statickej analýzy pri dynamickej analýze sa zaťažujúce sily v čase menia (nestacionárna úloha). Posunutia, rýchlosti, zrýchlenia, deformácie a napätia sú časovo závislé. Dynamické analýzy môžu byť:

- lineárne,
- nelineárne.

Pomocou lineárnych alebo nelineárnych dynamických analýz možno spočítať odozvu telies na dynamické zaťaženie [29].

6.1 Dynamické zaťaženie

Možno ho všeobecne rozdeliť na:

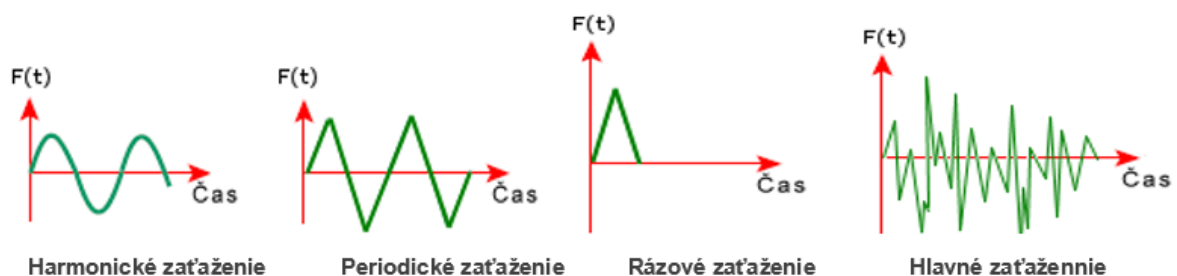
- deterministické,
- nedeterministické.

Deterministické zaťaženie je správne určené ako funkcia času a možno ho presne predvídať. Môže byť harmonické, periodické alebo neperiodické. Ak je zaťaženie deterministické, sú výsledky tiež deterministické.

Nedeterministickej zaťaženie nie je možné správne určiť ako explicitnú funkciu času, a je najlepšie popísané štatistickými parametrami. Ak je zaťaženie nedeterministické, sú výsledky tiež nedeterministické.

Medzi dynamické zaťaženia patria predovšetkým oscilačné zaťaženia, rázy, kolízie a náhodné zaťaženia.

Typické druhy dynamického zaťaženia sú na Obr. 66:



Obr. 66 Druhy dynamického zaťaženia [9]

Čas vystupuje ako ďalšia premenná a úloha sa rieši v nejakom časovom intervale. Maticová rovnica (2) vyjadruje podmienku rovnováhy telesa v danom časovom okamihu.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (2)$$

kde:

$[K]$ – $n \times n$ symetrická matica tuhosti,

$\{a(t)\}$ – n -rozmerný vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie,

$\{f(t)\}$ – n -rozmerný vektor sily.

Po rozšírení rovnice (2) o účinok zotrvačných a vnútorných tlmiacich síl je získaný tvar rovnice (3) pre dynamické úlohy [29]:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{a}(t)\} + [K] \cdot \{a(t)\} = \{f(t)\} \quad (3)$$

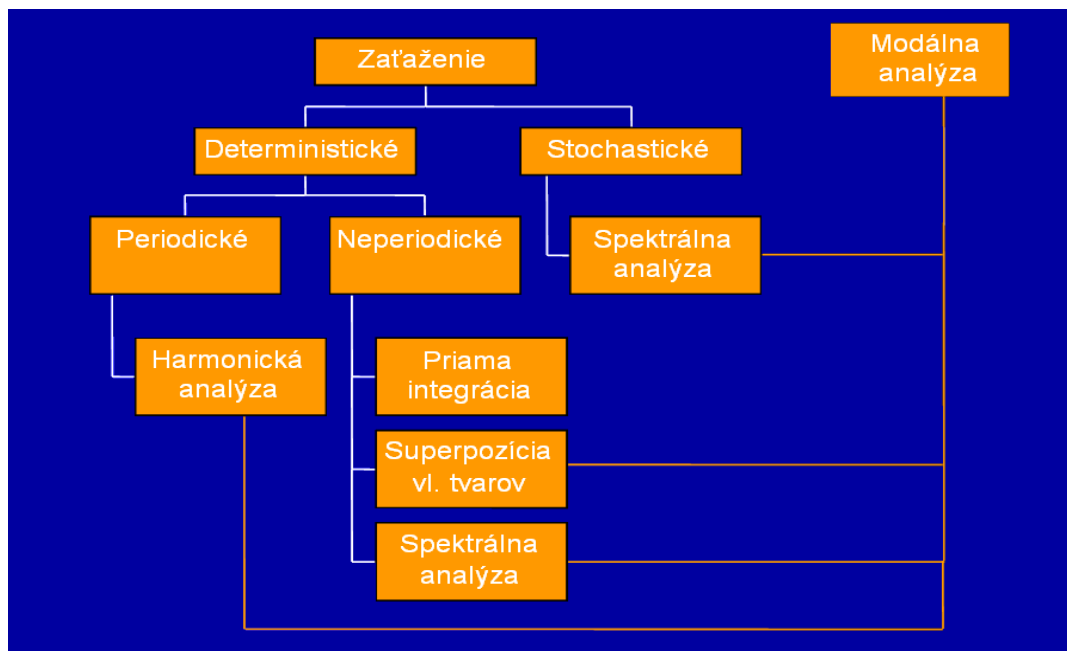
kde:

$[M]$ – $n \times n$ symetrická matica hmotnosti,

$[C]$ – $n \times n$ symetrická matica tlmenia,

$\{\dot{a}(t)\}$ – n -rozmerný vektor rýchlosti uzlových bodov konštrukcie,

$\{\ddot{a}(t)\}$ – n -rozmerný vektor zrýchlenia uzlových bodov konštrukcie.



Obr. 67 Rozdelenie dynamických analýz

Metódy riešenia dynamických analýz, vyplývajú z Obr. 67.

- metóda priamej integrácie pohybových rovníc:
 - ✓ explicitné – metóda stredovej diferencie
 - ✓ implicitné – Houboltova metóda

- Wilsonova metóda
- Newmarkova metóda – najčastejšie používaná (ANSYS)
- metóda superpozície vlastných tvarov

6.2 Základné typy dynamických analýz

K základným typom dynamických analýz možno zaradiť:

1. Modálnu analýzu (Modal analysis),
2. Harmonickú analýzu (Harmonic response),
3. Prechodovú analýzu (Transient analysis),
4. Spektrálnu analýzu (Spectral/Seismic analysis).

7 Modálna analýza (Modal analysis)

Modálna analýza je pomerne mladá oblasť dynamiky, ktorá sa v priemysle začala využívať v 80. rokoch 20. storočia. Jej neskorá implementácia do praxe je spojená s vývojom programového a hardvérového vybavenia FEM [30].

Problémy štrukturálnych vibrácií predstavujú významné riziká a obmedzenia pri návrhu širokého rozsahu strojárenských produktov. Môžu byť príčinou porušenia štrukturálnej celistvosti, alebo môžu znižovať výkon strojného zariadenia. Zároveň nadmerné vibrácie vždy spôsobujú minimálne nadmernú hlučnosť a narušujú tak pokojný chod strojného zariadenia. Väčšina problémov spojených s nadmerným hlukom či kmitaním je v technickej praxi spôsobená tzv. modálnymi vlastnosťami samotnej mechanickej sústavy. Tieto modálne vlastnosti sa určujú a následne vyhodnocujú použitím modálnej analýzy. Vďaka takto získaným parametrom je možné predpokladať vlastnosti systému.

Modálna analýza má v súčasnosti nezastupiteľné miesto pri diagnostike vibrácií strojných zariadení, ďalej pri analýze nežiaducich javov, ako sú napr. hluk, deformácie alebo chvenie mechanických sústav. Modálna analýza sa používa v prípadoch, ak je zmena v čase explicitne známa a ak je požadovaná odozva funkciou času.

K typickým zaťaženiám patria:

- Rázové (alebo pulzné) zaťaženie,
- Všeobecné časovo premenné zaťaženie (periodické alebo neperiodické),
- Rovnomerný základný pohyb (posun, rýchlosť a zrýchlenie použité na všetky podpery),
- Pohyby podpier (posunutie, rýchlosť a zrýchlenie použité nejednotne na vybrané podpery).

Počiatkové podmienky (konečné posunutie, rýchlosť alebo zrýchlenie použité na diel alebo celý model v čase $t = 0$)

Riešenie rovníc pohybu pri systémoch s viacerými stupňami voľnosti využíva postupy modálnej analýzy.

Presnosť riešenia je možné zvýšiť použitím menšieho časového kroku.

Po spustení analýzy je možné zobrazit' posuny, napätia, pomerné deformácie, reakčné sily atď. v rôznych časových krokoch alebo možno vytvorit' graf s výsledkami na určených miestach v závislosti na čase.

Cieľom modálnej analýzy je určenie:

- vlastných frekvencií kmitania,
- vlastných tvarov kmitania,

- modálne tlmenie sústavy [30].

Modálna analýza určuje len vlastné frekvencie samotného systému - skúmanej geometrie. Nesúvisí so zaťažením, iba s geometriou. Rezonančné frekvencie sa menia len v dôsledku tvaru modelu a od okrajových podmienok.

7.1 Matematická formulácia problému

Sústava pohybových rovníc v lineárnom systéme s n stupňami voľnosti budenom časovo premennou silou je v tvare (4), keď tlmenie a zaťaženie (budenie) nie sú uvažované (5):

$$[\mathbf{M}].\{\ddot{\mathbf{a}}(t)\} + [\mathbf{C}].\{\dot{\mathbf{a}}(t)\} + [\mathbf{K}].\{\mathbf{a}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (4)$$

$$[\mathbf{M}].\{\ddot{\mathbf{a}}(t)\} + [\mathbf{K}].\{\mathbf{a}(t)\} = \mathbf{0} \quad (5)$$

kde:

$[\mathbf{M}]$ – $n \times n$ symetrická matica hmotnosti sústavy,

$[\mathbf{C}]$ – $n \times n$ symetrická matica tlmenia sústavy,

$[\mathbf{K}]$ – $n \times n$ symetrická matica tuhosti sústavy,

$\{\ddot{\mathbf{a}}(t)\}$ – n -rozmerný vektor zrýchlenia uzlových bodov konštrukcie,

$\{\dot{\mathbf{a}}(t)\}$ – n -rozmerný vektor rýchlosti uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{a}(t)\}$ – n -rozmerný vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{f}(t)\}$ – n -rozmerný vektor sily.

Rovnica (5) tvorí sústavu n súbežných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi [29]. Rovnica pohybu je spojená len podmienkami zotrvačnosti a tuhosti. Spojenie závisí na súradnicovom systéme, pomocou ktorého boli rovnice pohybu matematicky popísané.

Základnou myšlienkou modálnej analýzy je transformácia spojitej sústavy rovníc (5) do sady nezávislých rovníc pomocou modálnej matice $[\Phi]$ ako transformačnej matice.

$[\Phi]$ obsahuje normálne režimy $\{\varphi\}_i$ pre $i = 1, \dots$, usporiadané takto:

$$[\Phi] = [\{\varphi\}_1 \ \{\varphi\}_2 \ \dots \ \{\varphi\}_n]$$

Riešenie sa predpokladá v tvare (6):

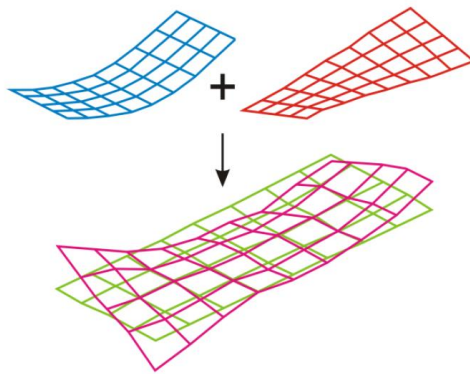
$$\{\mathbf{a}(t)\} = [\Phi] \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (6)$$

kde:

ω – vlastná kruhová frekvencia

$[\Phi]$ – vektor vlastných tvarov (módov) kmitania, ktorý obsahuje veľkosť amplitúd zložiek kmitania uzlových bodov telesa, ktoré nezávisia na čase, ale len od počiatočného impulzu, ktorý takéto kmitanie vyvolal.

K popisu modálnych parametrov a správania mechanických štruktúr sa využíva možnosť rozkladu zložitého kmitavého deja na čiastkové (modálne, vidové, vlastné) deje (Obr. 68), z ktorých každý je charakterizovaný vlastnou frekvenciou a vlastným tvarom kmitov.



Obr. 68 Princíp modálneho rozkladu [30]

7.2 Využitie modálnej analýzy

Metódou modálnej analýzy je možné riešiť mnoho technických problémov vyskytujúcich sa pri návrhu, výrobe či prevádzke mechanických sústav alebo ich častí. Využíva sa tiež pri analýze nežiaducich javov pri chode mechanických sústav, ako je nadmerný hluk, deformácie, chvenie, poškodenie a pod. [30].

a) v teoretickej rovine ako **výpočtová**,

Pri **teoretickej** modálnej analýze sa zostavia pohybové rovnice a výsledné hodnoty modálnych parametrov sa získajú až použitím tzv. modálnej transformácie. Táto transformácia spočíva v nahradení sústavy navzájom viazaných homogénnych diferenciálnych rovníc sústavou nezávislých, izolovane riešiteľných, homogénnych diferenciálnych rovníc.

b) v praktickej rovine **realizáciou experimentálneho merania** reálnej mechanickej štruktúry.

Pri **experimentálnej** modálnej analýze sa určujú vlastné frekvencie, vlastné tvary kmitov a modálne tlmenie skúmanej sústavy pomocou experimentálne určenej množiny dát frekvenčnej prenosovej funkcie.

Modálne parametre získané experimentálnou analýzou sú v technickej praxi často porovnávané s modálnymi parametrami získanými výpočtovými metódami!

7.3 Dôvody použitia modálnej analýzy

- **Vyhnutie sa neželaným vibráciám v rezonančnej oblasti**

Vďaka výsledným vlastným tvarom kmitov budeného skúmaného systému je možné určiť miesta jeho maximálnych výchyliek. Výsledné modálne parametre sú využívané aj pri identifikácii porúch, ako aj miest ich výskytu. Určité poruchy vykazujú špecifické zobrazenia v spektre snímaného signálu, ako napr. nevyváženosť, nesúosovosť a pod. Na základe toho je možné vykonať štrukturálne modifikácie (úprava geometrie, pridanie prídavných prvkov, zmena materiálových charakteristík a pod.) s cieľom eliminovať nebezpečné kmitanie.

- **Naladenie sústavy na vlastnú kruhovú frekvenciu**

S pomocou výsledných vlastných frekvencií je možné určiť nebezpečné prevádzkové stavy, do ktorých sa zariadenie nesmie dostať. V prípade zhody vlastných frekvencií s frekvenciami budiacich síl by nastala rezonancia systému, čo niekoľkonásobne znižuje jeho životnosť, zvyšuje hlučnosť a v neposlednom rade môže byť príčinou poškodenia.

- **Ako základný prvok ďalších typov analýz**

Porovnanie experimentálne získaných dát na prototypu s odpovedajúcimi dátami získanými pomocou FEM a optimalizovanie analytického modelu tak, aby odpovedal skutočnému, ktorý by slúžil k ďalším výpočtom a simuláciám. Takto optimalizovaný model je zbavený chýb, ktoré sú vnesené do výpočtu pri nedostatočnom zahrnutí všetkých okrajových podmienok.

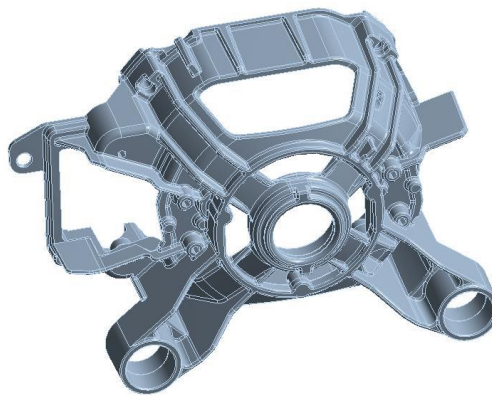
7.4 Postup modálnej analýzy pomocou FEM

1. Vytvorenie geometrie analyzovanej konštrukcie (Obr. 69).

2. Definícia materiálových vlastností modelu:

- merná hustota materiálu,
- Poissonove číslo,

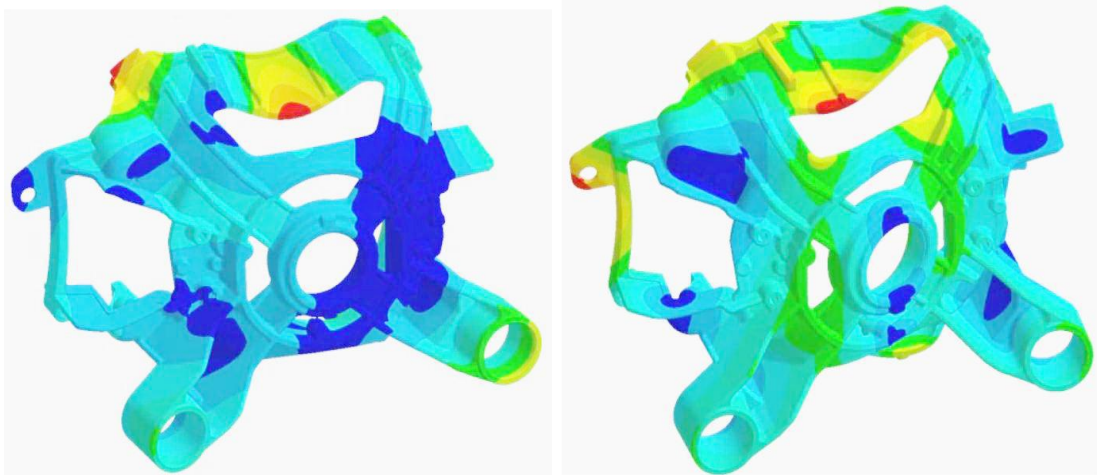
- Youngov modul pružnosti materiálu.
3. Definícia okrajových podmienok potrebných pre vytvorenie výpočtového modelu (zohľadnenie mechanických väzieb vo výpočte).
 4. Generovanie siete konečných prvkov (Obr. 70), tvorenej vhodne zvoleným konečným prvkom a jeho veľkosťou (pri tvorbe siete je dôležité mať na pamäti, že čím je sieť jemnejšia, tým je výpočet presnejší avšak časovo náročnejší!).
 5. Nastavenie riešiča, ktorý obsahuje vhodný výpočtový algoritmus, zvolí sa frekvenčný rozsah a počet hľadaných vlastných tvarov kmitov mechanickej štruktúry.
 6. Export hľadaných modálnych parametrov analyzovanej mechanickej štruktúry (Obr. 71).



Obr. 69 Geometria analyzovanej konštrukcie [30]



Obr. 70 Ukážka sieťovania geometrie analyzovanej konštrukcie [30]



Obr. 71 Ukážka vybraných vlastných tvarov kmitov získaných modálnou analýzou metódou konečných prvkov v programe ANSYS [30]

8 Harmonická analýza (Harmonic response)

Harmonická analýza je odvetvie matematiky zaoberajúce sa reprezentáciami funkcií alebo signálov ako superpozíciou základných vlnení a štúdiom zovšeobecnených pojmov Fourierovho radu a Fourierovej transformácie (tj. rozšírený tvar Fourierovej analýzy). V posledných dvoch storočiach sa harmonická analýza stala rozsiahlym odborom s aplikáciami v rôznych oblastiach.

Harmonická analýza je zameraná na rozloženie neharmonických zložiek signálu na harmonické zložky. Akýkoľvek časovo premenlivý striedavý priebeh budiacej sily, ktorý je periodický neharmonický, sa môže nahradiť nekonečným radom sínusových a kosínusových funkcií, ak spĺňa tieto kritériá:

- a) je periodický,
- b) obsahuje konečný počet extrémov,
- c) obsahuje maximálny počet nespojitostí maximálne prvého druhu.

Mnoho aplikácií harmonickej analýzy vo vede a technike vychádza z myšlienky alebo hypotézy, že určitý jav alebo signál tvorí súčet čiastkových oscilačných zložiek. Obvyklými a jednoduchými príkladmi sú slapové javy v oceánoch a kmitajúce struny. Potom je často používaným prístupom skúsiť systém opísať diferenciálnou rovnicou alebo sústavou rovníc, z ktorých je možné predpovedať základné vlastnosti, ako sú amplitúdy, frekvencie a fázy jednotlivých oscilačných zložiek. Konkrétne rovnice môžu byť rôzne, ale teória vyberá rovnice reprezentujúce všeobecne použiteľné princípy.

Pomocou modálnej analýzy je možné získať časové priebehy a určovať zaťaženie ako funkciu času, prechodové zmeny v závislosti na čase však nemusia byť vždy požadované. Pomocou **harmonickej analýzy** je možné v takýchto prípadoch **šetriť výpočtový čas a výpočtové zdroje riešením len špičkovej odozvy v ustálenom stave** v požadovanom rozsahu prevádzkových frekvencií.

Každá štruktúra má tendencie pri určitých frekvenciách vibrovať. Tieto frekvencie sa nazývajú prirodzené alebo rezonančné frekvencie. Každá prirodzená frekvencia je spojená s určitým tvarom, ktorý model pri vibrovaní na tejto frekvencii prijíma.

Keď je konštrukcia budená dynamickým zaťažením s frekvenciou, ktorá sa zhoduje s jednou z prirodzených frekvencií, vznikajú v nej veľké posunutia a napätia. Tento jav sa nazýva **rezonancia**. U netlmených systémov rezonancia spôsobuje teoreticky nekonečný pohyb. Tlmenie však reakciu štruktúr obmedzuje rezonančným zaťažením.

Frekvenčné štúdie pomôžu vyhnúť sa rezonancii a navrhnúť systémy s vibračnou izoláciou. Tvoria tiež základ pre vyhodnotenie reakcie lineárnych dynamických systémov, kde

sa odozva systému v dynamickom prostredí považuje za rovnú súčtu podielov režimov, ktoré sa v analýze berú do úvahy.

Rezonancia je v návrhu niektorých zariadení žiaduca!

Skutočný model má nekonečné množstvo prirodzených frekvencií. FE model však má konečné množstvo prirodzených frekvencií, ktoré je rovné počtu stupňov voľnosti, ktoré sa v modeli berú do úvahy. Pre väčšinu potrieb stačí prvých niekoľko režimov.

Prirodzené frekvencie a zodpovedajúce tvary režimov závisia na geometrii, vlastnostiach materiálu a podmienkach podopretia. Výpočty prirodzených frekvencií a tvarov režimov sa nazývajú modálne a frekvenčné analýzy.

Cieľom harmonickej analýzy je určenie:

- amplitúdy kmitania,
- fázového posunutia,
- amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky,
- ostatných veličín (pretvorenie, reakcie, napätia, ...).

8.1 Matematická formulácia problému

Sústava pohybových rovníc v lineárnom systéme s n stupňami voľnosti buzenom časovo premennou silou je v tvare (7):

$$[\mathbf{M}].\{\ddot{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\} + [\mathbf{C}].\{\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\} + [\mathbf{K}].\{\mathbf{a}(\mathbf{t})\} = \{\mathbf{f}(\mathbf{t})\} \quad (7)$$

kde:

$[\mathbf{M}]$ – $n \times n$ symetrická matica hmotnosti,

$[\mathbf{C}]$ – $n \times n$ symetrická matica tlmenia,

$[\mathbf{K}]$ – $n \times n$ symetrická matica tuhosti,

$\{\ddot{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\}$ – n -rozmerný vektor zrýchlenia uzlových bodov konštrukcie,

$\{\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\}$ – n -rozmerný vektor rýchlosti uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{a}(\mathbf{t})\}$ – n -rozmerný vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{f}(\mathbf{t})\}$ – n -rozmerný vektor sily, ktorý má harmonický priebeh.

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}.e^{i\omega t} \quad (8)$$

odozva (posunutie uzlov) konštrukcie má harmonický tvar

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} \cdot e^{i\omega t} \quad (9)$$

Teda nová matematická formulácia problému bude:

$$[-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (10)$$

Pomocou harmonickej analýzy možno vyhodnocovať špičkovú odozvu systému v kludovom ustálenom stave v dôsledku harmonického zaťaženia alebo budenia základov.

8.2 Účinok zaťaženia pri harmonickej analýze

Geometria modelu sa obyčajne vytvára podľa pôvodného (nedeformovaného) tvaru modelu. Niektoré zaťaženia, napríklad vlastná hmotnosť konštrukcie, sú vždy prítomné a môžu mať významné účinky na tvar konštrukcie a jej modálne vlastnosti. V mnohých prípadoch je možné tento účinok ignorovať, pretože vyvolané priehyby sú malé.

Zaťaženie ovplyvňuje modálne vlastnosti telesa. Obvykle zaťaženie tlakom znižuje rezonančnú frekvenciu a zaťaženie v ťahu ju zvyšuje. Túto skutočnosť ľahko znázorňuje zmena napätia na husľovej strune. Čím väčšie je napätie, tým väčšia bude frekvencia a tón.

Pre frekvenčnú analýzu nemusí byť definované žiadne zaťaženie!

V každom kroku riešenia majú všetky použité zaťaženia a budenie základov rovnakú frekvenciu. Veľkosti sú definované pridruženými frekvenčnými krivkami.

Harmonické zaťaženie F je vyjadrené vzťahom (11):

$$F = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (11)$$

kde:

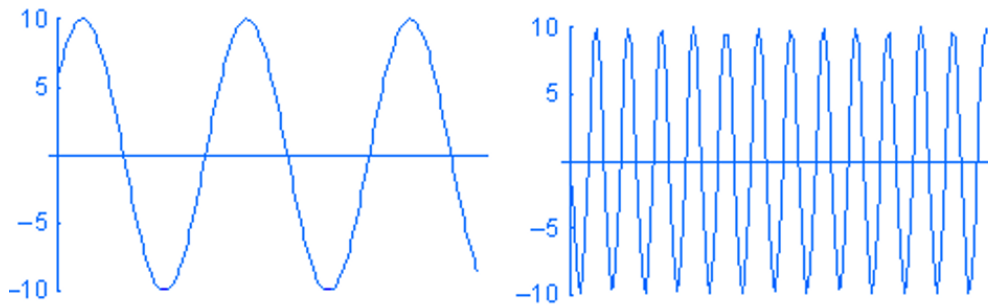
A – amplitúda,

ω – frekvencia,

t – čas

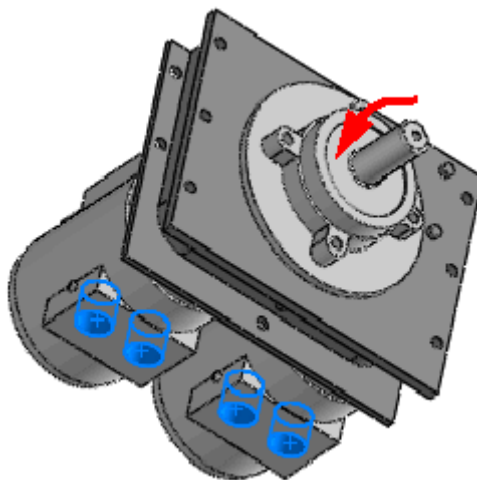
φ – fázový uhol.

Na Obr. 72 sú vzorové harmonické zaťaženia s rôznymi frekvenciami v závislosti na čase.



Obr. 72 Vzorové harmonické zaťaženia s rôznymi frekvenciami v závislosti na čase

Napríklad motor, upevnený na skúšobnej stolici (Obr. 73), prenáša harmonické zaťaženie do systému podpier prostredníctvom skrutiek. Na 3D modeli podporného systému je možné zobrazit' špičkové napätia, posuny, zrýchlenia, rýchlosti a fázové uhly reakcií v celom rozsahu prevádzkových frekvencií.



Obr. 73 Motor upevnený na skúšobnej stolici

8.3 Využitie harmonickej analýzy

- pri zariadeniach obsahujúcich rotujúce časti,
- pri telesách zaťažených cyklickými silami s konštantnou amplitúdou a frekvenciou,
- pre úlohy obtekania prúdom kvapaliny.

9 Prechodová analýza (Transient structural analysis)

Pri výpočte statickej úlohy je postačujúce zadávať konečné hodnoty síl. Pri dynamickej analýze sú však tieto hodnoty časovo závislé a ich priebeh je potrebné zadať pre celý časový interval. Vo FEM programoch sa to realizuje tak, že v závislosti od známej časovej zmeny síl sa časový interval rozdelí na potrebný počet zaťažovacích úsekov, v ktorých sa menia sily skokom alebo lineárne. Vtedy stačí pre každý zaťažovací úsek zadať čas len na jeho konci a hodnoty síl v tomto čase. Pritom sa zvyčajne pre každý zaťažovací úsek zadáva aj veľkosť časového kroku, od ktorého závisí presnosť riešenia úlohy v príslušnom časovom úseku. Tento časový krok môže byť v každom zaťažovacom úseku rôzny.

Cieľom prechodovej analýzy je určenie:

- odozvy – deformácií (posunutí) konštrukcie na časovo závislé zaťaženie,
- ostatných veličín (pretvorenia, reakcie, napätia, ...) v časovej oblasti.

9.1 Matematická formulácia problému

Pri prechodovej analýze nie sú kladené žiadne obmedzenia na zaťaženie a posunutie. Sústava pohybových rovníc v lineárnom systéme s n stupňami voľnosti budenou všeobecnou časovo premennou silou (pravá strana rovnice (12)) nadobúda tvar:

$$[\mathbf{M}].\{\ddot{\mathbf{a}}(t)\} + [\mathbf{C}].\{\dot{\mathbf{a}}(t)\} + [\mathbf{K}].\{\mathbf{a}(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (12)$$

kde:

$[\mathbf{M}]$ – $n \times n$ symetrická matica hmotnosti,

$[\mathbf{C}]$ – $n \times n$ symetrická matica tlmenia,

$[\mathbf{K}]$ – $n \times n$ symetrická matica tuhosti,

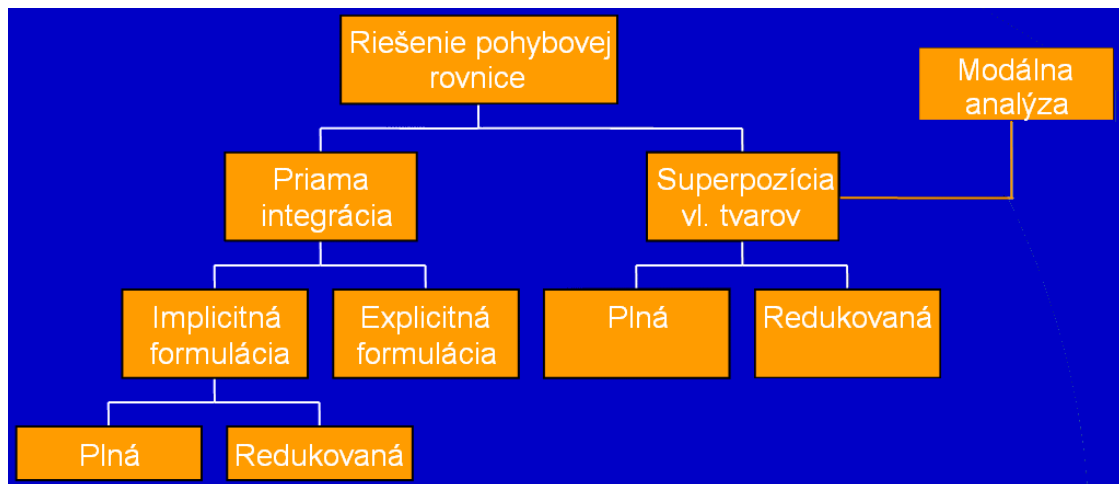
$\{\ddot{\mathbf{a}}(t)\}$ – n -rozmerný vektor zrýchlenia uzlových bodov konštrukcie

$\{\dot{\mathbf{a}}(t)\}$ – n -rozmerný vektor rýchlosti uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{a}(t)\}$ – n -rozmerný vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{f}(t)\}$ – n -rozmerný vektor sily.

Metódy priamej integrácie rovníc dynamickej rovnováhy



Obr. 74 Postup riešenia prechodovej analýzy v FEM

9.2 Využitie prechodovej analýzy

- pri zariadeniach namáhaných rázmi (automobilový priemysel, tlmiče, technologické procesy tvárnenia, ...),
- v zariadeniach s časovo premenlivým zaťažením.

10 Spektrálna analýza (Response spectrum analysis)

Cieľom spektrálnej analýzy je určenie:

- odozvy konštrukcie na časovo závislé zaťaženie s veľkým počtom frekvencií (napr. zemetrasenie) – deterministické zaťaženie,
- určiť odozvu konštrukcie na náhodné zaťaženie – stochastické zaťaženie.

10.1 Matematická formulácia problému

Sústava pohybových rovníc v lineárnom systéme s n stupňami voľnosti budenom kinematicky – pohybom podložia je v tvare (13):

$$[\mathbf{M}].\{\ddot{\mathbf{a}}_s(t)\} + [\mathbf{C}].\{\dot{\mathbf{a}}_s(t)\} + [\mathbf{K}].\{\mathbf{a}_s(t)\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (13)$$

kde:

$[\mathbf{M}]$ – $N \times N$ symetrická matica hmotnosti,

$[\mathbf{C}]$ – $N \times N$ symetrická matica tlmenia,

$[\mathbf{K}]$ – $n \times n$ symetrická matica tuhosti,

$\{\ddot{\mathbf{a}}_s(t)\}$ – n -rozmerný vektor zrýchlenia uzlových bodov konštrukcie

$\{\dot{\mathbf{a}}_s(t)\}$ – n -rozmerný vektor rýchlosti uzlových bodov konštrukcie,

$\{\mathbf{a}_s(t)\}$ – n -rozmerný vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie.

Systém je budený kinematicky – pohybom podložia, napr. pre pohyb v smere osi x .

10.2 Využitie spektrálnej analýzy

- pri zariadeniach, ktoré môžu byť vystavené zemetraseniu (stoja v ohrozených oblastiach – mosty, budovy, ...),
- v zariadeniach, v ktorých sa vyskytujú náhodné zaťaženia.

11 Záver

Vysokoškolská učebnica sa venuje hlavným témam a konceptom, ktoré sú nevyhnutné pre pochopenie počítačovej podpory inžinierskych činností. Matematické modelovanie a počítačová simulácia sú nástroje, ktoré zásadne menia prístup k riešeniu technických problémov. V priebehu tejto práce sme prešli rôznymi metódami, najmä metódou konečných prvkov (FEM), a ukázali ich využitie pri navrhovaní, testovaní a optimalizácii výrobných procesov a konštrukcií. Matematické modelovanie a simulácie umožňujú inžinierom testovať nové návrhy a overovať ich bez potreby nákladných fyzických experimentov. Opísané nástroje prispievajú k zvyšovaniu efektivity, spoľahlivosti a bezpečnosti výrobných procesov, a to vďaka možnosti rýchlej analýzy širokej škály scenárov.

V rámci jednotlivých kapitol sme diskutovali o teoretických základoch, praktických aplikáciách a aktuálnych výzvach, ktoré daná problematika prináša. Snahou bolo poskytnúť komplexný prehľad a podporiť kritické myslenie, ktoré študentom umožní lepšie chápať danú oblasť a aktívne sa zapájať do jej ďalšieho rozvoja.

Dôležité je si uvedomiť, že vedomosti získané zo študovanej vysokoškolskej učebnice tvoria len základ pre ďalšie štúdium. Študenti sú povzbudzovaní, aby pokračovali v prehlbovaní svojich vedomostí a zapojili sa do diskusie a výskumu, ktorý môže prispieť k zlepšeniu praxe a teórie v tejto oblasti.

Dúfam, že vysokoškolská učebnica poskytla solídny základ pre pochopenie kľúčových aspektov počítačovej podpory inžinierskych činností a inšpirovala vás k ďalšiemu štúdiu a skúmaniu.

Budúcnosť študovanej oblasti spočíva v schopnosti odborníkov adaptovať sa na nové výzvy a prinášať inovatívne riešenia. Veríme, že študenti a odborníci v praxi získali prostredníctvom vysokoškolskej učebnice ucelený prehľad o základných princípoch a technikách, ktoré im pomôžu pri riešení zložitých inžinierskych problémov. Tiež dúfame, že táto práca poslúži ako východiskový bod pre ďalší výskum a vývoj v oblasti počítačovej podpory inžinierskych činností. Úspech v dynamickej oblasti bude závisieť od schopnosti neustále sledovať technologické trendy a adaptovať nové prístupy do praxe.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Banks J, Carson J, Nelson BL, Nicol D. Discrete-event system simulation (Fourth edition). 4th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall; 2005.
- [2] Alexander Hrennikoff 2024. <https://open.library.ubc.ca/viewer/arphotos/1.0024607?v=oc>.
- [3] Richard Courant 2024. https://openlibrary.org/authors/OL68351A/Richard_Courant.
- [4] Argyris 2024. <https://www.nae.edu/File.aspx?id=191423>.
- [5] Clough 2024. https://cdn.cadfm.net/v7/https://www.cadfm.net/fileadmin/_processed_/b/1/csm_Clo_ugh_9755a91529.jpg.
- [6] MacNeal 2024. <https://www.nae.edu/File.aspx?id=260631>.
- [7] Schwendler 2024. https://www.digitalengineering247.com/images/article/macneal-schwendler_MSC-e1517603243957.jpg.
- [8] Králik J. Modelovanie konštrukcií v metóde konečných prvkov. Bratislava: STU v Bratislave; 2009.
- [9] Vojtko I, Ján K. Metóda konečných prvkov v teórii a príkladoch. Fakulta výrobných technológií v Košiciach; 2007.
- [10] Brožovský J, Konečný P. Metoda konečných prvků ve stavební mechanice. Ostrava, Czech Republic: VSB-TU Ostrava; 2012.
- [11] Žmindák M, Grajciar I, Nozdrovický J. Modelovanie a výpočty v metóde konečných prvkov: Modelovanie v ANSYS. Diel I. Vedeckotechnická spoločnosť pri Žilinskej univerzite; 2004.
- [12] Dassault Systèmes, “Abaqus” 2024. <https://www.3ds.com/products/simulia/abaqus>.
- [13] Grabcat community 2024. <https://grabcad.com/library/high-deformation-twisting-abaqus-cae-explicit-1>.
- [14] Hexagon 2024. <https://hexagon.com/products/product-groups/computer-aided-engineering-software/adams>.
- [15] Adams 2024. <https://d3snfrf5umcrvh.cloudfront.net/wp-content/uploads/2018/07/Screen-Shot-2018-07-24-at-9.20.45-AM-e1532449515111.jpg>.
- [16] Ansys Mechanical 2024. <https://www.ansys.com/products/structures/ansys-mechanical>.
- [17] EDRMedeso 2024. <https://edrmmedeso.com/article/top-5-features-in-ansys-mechanical-2023-r1/>.
- [18] Ansys fluent 2024. <https://images.ansys.com/is/image/ansys/fluent-fluids-r2-2024-web>

- ui-updates?wid=835&fmt=webp&op_usm=0.9,1.0,20,0&fit=constrain,0.
- [19] LS-DYNA 2024. <https://www.ansys.com/products/structures/ansys-ls-dyna>.
- [20] LS-DYNA 2024. <https://images.ansys.com/is/image/ansys/2021-01-ls-dyna-static-burst-simulation>.
- [21] FORGE 2024. <https://www.transvalor.com/en/forge>.
- [22] TRANSVALOR product overview 2024. http://www.kc96.pl/upload/Product_Overview_FORGE_NxT_2.1_EN.pdf.
- [23] MSC Marc 2024.
- [24] DEVELOP3D 2024. <https://develop3d.com/develop3d-blog/msc-software-joins-ansys-and-ds-simulia-in-offering-gpu-accelerated-simulat/>.
- [25] MSC Nastran 2024. https://hexagon.com/products/product-groups/computer-aided-engineering-software/msc-nastran?utm_easyredir=www.mscsoftware.com.
- [26] Engineering Science Analysis Corp. 2024. https://www.esacorp.com/wp-content/uploads/2016/08/nug_53b.png.
- [27] ESI Group 2024. <https://www.esi-group.com/products/virtual-performance-solution/crash-and-safety>.
- [28] PAM-Crash 2024. <https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRrFXxFKH-hIxBfGluu9jaHIJHZf0-CpDkSHV9bCRHLcG43kGeN>.
- [29] Murín J, Hrabovský J, Kutiš V. Metóda konečných prvkov Vybrané kapitoly pre mechatronikov. Nakladateľstvo STU; 2014.
- [30] Frankovský P, Guľa M, Mičko D, Hudák P, Hrivňák J. Využitie modálnej analýzy pri diagnostike vibrácií strojných zariadení. Transf Inovácií 2011;19:178–84.

POČÍTAČOVÁ PODPORA INŽINIERSKYCH ČINNOSTÍ

Vysokoškolská učebnica

<https://doi.org/10.32056/KOMAG/Monograph2024.4>

Autori:

Milan Sága, prof. Dr. Ing.

Vieroslav Molnár, prof. Ing. PhD.

Recenzenti:

Elena Pivarčiová, prof. Mgr. PhD.

Witold Bialy, dr hab. inż. prof. ITG KOMAG

Marian Králik, doc. Ing. CSc.

Vydanie: 1.

Rok vydania: 2024

Počet strán: 98

Náklad: 100 ks.

Vydal: ITG KOMAG, Gliwice, Polsko

Vyrobil: SWEL, s.r.o. Tuchyňa, Slovensko

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

© Milan Sága – Vieroslav Molnár 2024

ISBN 978-83-65593-39-9